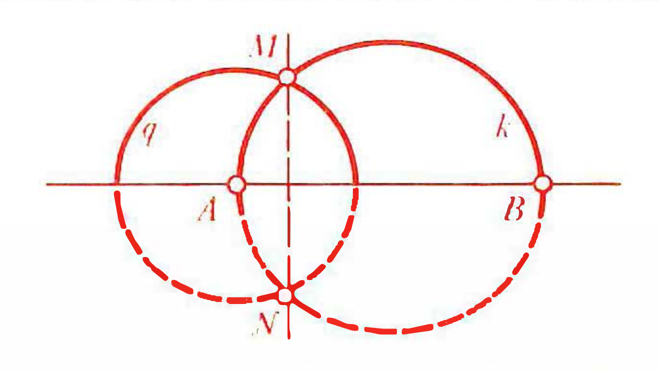
Lecciones populares de matemáticas

ACERCA DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

A. S. Smogorzhevski



Editorial MIR  Moscú

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. S. SMOGORZHEVSKI

ACERCA DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS. 1978

Traducido del ruso por el ingeniero
Virgilio Llanos Más

на испанском языке

INDICE

PREFACIO DEL AUTOR

El objetivo de este libro es dar a conocer al lector los fundamentos principales de la geometría no euclidiana de Lobachevski.

El célebre científico ruso N. I. Lobachevski era un pensador notable. A él le pertenece uno de los inventos matemáticos más importantes, la creación de un sistema geométrico original distinto de la geometría de Euclides. Los datos biográficos breves de Lobachevski el lector los hallará en el § 1 de nuestro libro.

Las geometrías de Euclides y Lobachevski tienen mucho de común; en ellas sólo son diferentes las definiciones, los teoremas y las fórmulas ligadas al axioma del paralelismo. Para comprender qué es lo que suscitó esta diferencia se debe examinar cómo surgieron y desarrollaron las nociones geométricas fundamentales. El § 2 está dedicado a esta cuestión.

Para la comprensión del libro, además del conocimiento de geometría (planimetría) y de trigonometría en el grado del curso de segunda enseñanza, se requiere el conocimiento de la transformación denominada inversión. En el § 3 damos un resumen de sus propiedades más importantes. Esperamos que el lector, sin gran trabajo y con provecho para sí, asimile el contenido de este párrafo que, igual que el § 10, juega en nuestro libro un papel que aunque es auxiliar es de suma importancia.

§ 1. BOSQUEJO RESUMIDO DE LA VIDA Y ACTIVIDAD DE N. I. LOBACHEVSKI

Nicolái Ivánovich Lobachevski nació el 20 de noviembre (1 de diciembre según el estilo nuevo) de 1792 en la familia de un funcionario pobre. Nicolái Lobachevski y sus dos hermanos quedaron prematuramente a cargo de su madre, mujer enérgica y sensata que, a pesar de la excesiva escasez de medios, envió a todos sus hijos a estudiar en el gimnasio de Kazán.

N. I. Lobachevski estudió en el gimnasio de Kazán desde 1802 hasta 1807, y en la Universidad de Kazán, desde 1807 hasta 1811. Disponiendo de brillantes aptitudes matemáticas Lobachevski cursó exitosamente los estudios y, una vez acabados éstos en la Universidad, fue retenido en ella para prepararse a ser catedrático, título que le fue concedido en el año 1816.

La actividad pedagógica de Lobachevski dejó una viva impresión en la memoria de sus discípulos. Sus conferencias se caracterizaban por la claridad y plenitud de exposición. Los conocimientos de Lobachevski en las diversas ramas de la ciencia eran vastos y multifacéticos, hecho que le permitía asumir sobre sí ciclos de conferencias no sólo de asignaturas de la serie matemática, sino también de mecánica, física, astronomía, geodesia, topografía.

Habiendo sido elegido en el año 1827 rector de la Universidad de Kazán, Lobachevski desempeñó esta función cerca de veinte años. Siendo un administrador talentoso y enérgico que comprendía bien los problemas de la enseñanza superior pudo convertir la Universidad de Kazán en un centro modelo de enseñanza superior de aquel tiempo. Por iniciativa de Lobachevski la Universidad comenzó a editar las "Memorias científicas", se fomentó la construcción de edificios universitarios y se inauguró el observatorio de astronomía de la Universidad.

Su actividad científica dio a Lobachevski fama mundial. El inmortalizó su nombre con la creación de la geometría no euclidiana que en la actualidad, de acuerdo al nombre de su fundador, la denominan geometría de Lobachevski [1].

---

[1] Otra de sus denominaciones, la de *geometría hiperbólica*, está vinculada al hecho de que en ésta la línea recta, igual que la hipérbola en la geometría euclidiana, tiene dos puntos alejados infinitamente (véase § 4).

El 11 (23) de febrero de 1826, en la sesión de la Sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán, Lobachevski intervino con una conferencia en la que, por primera vez, informó respecto a su invento de la geometría no euclidiana. La primera exposición de los principios de ésta, aparecida en la prensa, fue la memoria de Lobachevski "Sobre los fundamentos de la Geometría", publicada en los años 1829 – 1830 en la revista "Boletín de Kazán".

El invento de Lobachevski no fue concebido por la mayoría de sus contemporáneos; sus trabajos respecto a la geometría obtuvieron juicios negativos tanto en Rusia como en el extranjero. Las ideas del gran sabio ruso eran demasiado audaces y diferían ostensiblemente con los puntos de vista que entonces predominaban en la ciencia; precisamente por esto transcurrió mucho tiempo antes de que dichas ideas se ganaran el reconocimiento común que vino solamente después de la muerte de Lobachevski.

Lobachevski no fue disuadido de la justeza de sus deducciones por los ataques de la crítica y, con la energía e insistencia que le caracterizaban, prosiguió el estudio del sistema geométrico creado por él. Publica una serie de trabajos dedicados a la geometría no euclidiana. El último de éstos, terminado por Lobachevski algo antes de su muerte, fue dictado por él cuando ya no podía escribir por la ceguedad que le afectó en su vejez.

La actividad científica de Lobachevski no quedaba reducida a las investigaciones geométricas, perteneciéndole también varios trabajos fundamentales en la rama del álgebra y del análisis matemático. El método de solución aproximada de ecuaciones algebraicas, inventado por Lobachevski, es muy fino y práctico.

Los criterios filosóficos de Lobachevski tenían tendencia materialista bien destacada, y éste consideraba que el medio más seguro de comprobación de las deducciones teóricas era la experiencia, la práctica. Lobachevski exigía una enseñanza de las matemáticas que avezara a ver tras las operaciones matemáticas los fenómenos reales de la vida.

En el año 1846 Lobachevski fue destituido de su trabajo en la Universidad y nombrado ayudante del curador del distrito de enseñanza de Kazán. Aunque formalmente esto era ascenso en el cargo, prácticamente, de esta manera, los jefes superiores se esforzaron por deshacerse del rector que, por ser de orientación progresista, les era indeseable. En su nuevo cargo, subordinado al curador del distrito de enseñanza de Kazán, Lobachevski se veía mucho más restringido en sus actividades que durante



su permanencia en el cargo de rector de la Universidad y sufría por su retiro de ésta, a la que estaba unida toda su vida.

Lobachevski falleció el 12 (24) de febrero de 1856. En 1896, frente al edificio de la Universidad de Kazán, fue erigido un monumento al eminente sabio[1].

§ 2. RESPECTO AL ORIGEN DE LOS AXIOMAS Y SU PAPEL EN LA GEOMETRÍA

Para aclarar el papel de los axiomas examinaremos en rasgos generales las etapas más importantes del desarrollo de la geometría desde los tiempos remotos.

La patria de la geometría son los países del Antiguo Oriente donde, hace varios milenios y debido a las necesidades de la agrimensura, arquitectura y astronomía, fueron elaborados importantes principios de aspecto práctico para la medición de ángulos, áreas de algunas figuras y volúmenes de los cuerpos más simples. Estos principios se elaboraron empíricamente (por vías prácticas) y, por lo visto, se transmitían oralmente: en los textos matemáticos que llegaron hasta nosotros hallamos frecuentemente aplicaciones de los principios geométricos, pero no encontramos tentativas de formularlos.

Con el tiempo, cuando se amplió el círculo de objetos a los que se aplicaban los conocimientos geométricos adquiridos, se puso en claro la necesidad de formular los principios geométricos en

[1] El lector puede encontrar datos biográficos más amplios respecto a Lobachevski en los libros siguientes:

V. F. Kagán. Lobachevski, M., L., 1948. Este amplio trabajo (506 págs.), además de la biografía detallada de Lobachevski, contiene también un resumen de sus obras.

V. F. Kagán. El gran sabio N. I. Lobachevski y su puesto en la ciencia mundial, M., L., 1943. Un libro pequeño escrito de manera popular.

P. A. Shirókov, V. F. Kagán. Estructura de la geometría no euclidiana. Edición 1 de la serie "La geometría de Lobachevski y el desarrollo de sus ideas", M., L., 1950. En una de las partes de este libro se da un resumen breve, bien llevado a cabo, de los fundamentos de la geometría de Lobachevski, resumen comprensible para el amplio círculo de lectores.

Véase también el artículo "Lobachevski" en el tomo 25 de la Gran Enciclopedia Soviética (2ª edición, págs. 314–317).

su forma más general, hecho que determinó el paso en la geometría de conceptos concretos a conceptos abstractos. Así, por ejemplo, el principio elaborado para medir el área de una parcela rectangular de tierra resultó ser apto para medir el área de una alfombra, la superficie de una pared, etc., y, como resultado, surgió la noción abstracta de rectángulo.

De este modo se constituyó el sistema de conocimientos que obtuvo el nombre de geometría. En la primera fase de su desarrollo la geometría era una ciencia empírica, es decir, una ciencia en la que todos los resultados se deducen directamente en la práctica.

El desarrollo de la geometría marchó por un nuevo camino cuando se reparó en que algunas de sus proposiciones no requieren argumentación empírica, ya que éstas pueden ser derivadas de otras proposiciones mediante deducciones basadas en las leyes de la lógica. Se comenzó a diferenciar en la geometría proposiciones de dos géneros: las establecidas por vía práctica (más tarde denominadas axiomas) y las demostrables lógicamente basándose en los axiomas (teoremas).

Puesto que, por no requerir dispositivos especiales, ni numerosas mediciones fastidiosas, la argumentación lógica en el aspecto técnico es considerablemente más simple que la empírica, ante los sabios de la antigüedad, como es natural, se planteó el problema de reducir al mínimo el número de proposiciones del primer género (axiomas) para facilitar de este modo el trabajo del geómetra trasladando el peso fundamental a la esfera del raciocinio lógico. Este objetivo resultó ser realizable, ya que la geometría se abstrae de todas las propiedades de los cuerpos excepto su extención, propiedad muy esencial pero tan simple que toda clase de relaciones geométricas pueden ser deducidas de un número reducido de proposiciones – axiomas según las leyes de la lógica.

De esta manera la geometría se transformó de ciencia empírica en ciencia deductiva de exposición axiomática, que caracteriza su estado actual [1)].

La primera exposición sistemática de las tesis fundamentales de la geometría llegada hasta nosotros fueron los "Elementos" de Euclides, escritos cerca de 300 años antes de nuestra era. Esta obra está construida según el esquema siguiente: después de las

---

[1)] Deducción – acción de deducir. Se llama deductiva a la ciencia en la que las tesis nuevas se derivan de las anteriores de manera puramente lógica.

definiciones y de los axiomas se exponen las demostraciones de los teoremas y las soluciones de los problemas, y, con eso, todo teorema nuevo se demuestra basándose en los axiomas y en los teoremas demostrados anteriormente. Los axiomas no se demuestran, solamente se enuncian.

Durante el transcurso de dos milenios los "Elementos" de Euclides gozaron de autoridad innegable en el mundo científico. Sin embargo, un pasaje de este trabajo parecía no estar suficientemente justificado. Se sobreentiende el axioma del paralelismo, que Euclides formuló así:

Si dos líneas rectas, al intersecarse con una tercera, forman ángulos internos unilaterales cuya suma es inferior a dos ángulos rectos, resulta ser que estas dos rectas, al prolongarlas ilimitadamente, se encontrarán por aquel lado en el que esta suma es inferior de dos ángulos rectos [1].

La justeza del axioma del paralelismo de Euclides no suscitaba dudas. La duda respecto a este axioma radicaba en otra cosa: ¿ era justo el haberlo relacionado a la categoría de los axiomas?, ¿no sería posible demostrar este axioma con ayuda de otros axiomas de los "Elementos" euclidianos y, de esta manera, pasarlo a la categoría de los teoremas?

Al principio, los intentos de demostrar el axioma del paralelismo reflejaban la tendencia señalada anteriormente de disminuir el número de proposiciones geométricas, que exigían fundamentación empírica. Con el transcurso del tiempo la situación varió: se olvidó el origen experimental de los axiomas y éstos se comenzaron a interpretar como verdades evidentes de por sí, independientemente de cualquiera que fuera el experimento [2]. Semejante punto de

[1] En los manuales escolares de geometría, el axioma del paralelismo de Euclides está sustituido por la siguiente proposición equivalente: *a través de un punto situado fuera de una recta se puede trazar solamente una recta paralela a la primera.*

Cualesquiera dos axiomas de la geometría euclidiana u otra geometría se consideran similares (equivalentes) si de ambos se deducen unos mismos resultados, a la par que todos los axiomas restantes de esta geometría quedan en vigor.

[2] Es sabido que los ciegos de nacimiento que en la edad madura han recuperado la vista por vía quirúrgica, al principio, después de la operación, no pueden distinguir el cubo de la esfera sin haberlos palpado. Asi se demuestra la necesidad del experimento para una percepción justa de las figuras geométricas, sin lo cual no pueden elaborarse conceptos geométricos.

vista engendró la seguridad de que el axioma del paralelismo, que por su complejidad es difícil admitirlo como axiomático, en realidad no es un axioma y, por consiguiente, se puede hallar la demostración de la afirmación contenida en él. Sin embargo, los numerosos esfuerzos en este sentido no dieron resultados positivos y el axioma del paralelismo, cual tesoro hechizado, no descubría a los investigadores sus secretos. Los intentos de demostrar este axioma, condenados al fracaso, exigieron un consumo enorme de trabajo intelectual de numerosas generaciones de sabios y fueron la expiación por la interpretación idealista de la esencia de los axiomas.

El tipo de demostración errónea del axioma del paralelismo de Euclides más difundido era el de su sustitución por otra proposición equivalente como, por ejemplo: *la perpendicular y la oblicua respecto a una misma recta se cortan*; o: *existe un triángulo semejante al triángulo dado pero no igual a éste*; o: *el lugar geométrico de puntos equidistantes de una recta dada, si se encuentran a un mismo lado de ésta, es una recta*; o: *a través de cualesquiera tres puntos se puede trazar o bien una recta, o bien una circunferencia*. Más adelante demostraremos que, si el axioma del paralelismo de Euclides no tiene lugar, todas estas proposiciones son erróneas. Por consiguiente, admitiendo cualquiera de las proposiciones enumeradas como un axioma, consideramos que el axioma euclidiano del paralelismo es justo, es decir, partimos de la justeza de aquello que queríamos demostrar.

En sus investigaciones de la teoría de las líneas paralelas Lobachevski fue por otro camino. Habiendo comenzado por intentos de demostrar el axioma del paralelismo pronto advirtió que uno de ellos conduce a resultados absolutamente inesperados. Este intento consistía en la utilización del método de demostración por oposición y se basaba en la consideración siguiente: si el axioma del paralelismo de Euclides es resultado de otros axiomas de los "Elementos" y si, no obstante, se admite que *a través de un punto fuera de una recta, en el plano determinado por éstos, se pueden trazar por lo menos dos rectas que no cortan a la recta dada*, resultará ser que esta suposición tarde o temprano, en sus resultados más inmediatos o más lejanos, conducirá a una contradicción. Entre tanto, analizando los nuevos y nuevos resultados de la admisión hecha por él, paradójicos desde el punto de vista de la geometría euclidiana, Lobachevski se persuadía de que éstos formaban un sistema lógico no contradictorio de teoremas capaces de constituir la base de una nueva teoría científica.

Así fue fundamentada la geometría no euclidiana; su axioma del paralelismo se diferencia del euclidiano y coincide con la suposición citada anteriormente, que en lo sucesivo denominaremos axioma del paralelismo de Lobachevski [1].

No obstante, quedaba no claro si se podía afirmar con seguridad que ninguno de los numerosos posibles resultados del axioma del paralelismo de Lobachevski conduciría a una contradicción. Lobachevski fijó la solución de esta cuestión: señaló que la incontrariedad de la geometría descubierta por él debe deducirse de la posibilidad de aritmetizarla, es decir, de la posibilidad de reducir la solución de cualquier problema geométrico a cálculos aritméticos y transformaciones analíticas, utilizando para ello las fórmulas de la trigonometría hiperbólica deducidas por él mismo. Ulteriormente fueron halladas por otros sabios demostraciones rigurosas de la incontrariedad de la geometría de Lobachevski.

Las investigaciones de Lobachevski en la rama de la geometría hiperbólica son muy vastas: abarcan su parte elemental, la trigonometría, la geometría analítica y la geometría diferencial. Utilizando los métodos de la geometría creada por él, Lobachevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las integrales definidas.

El descubrimiento de Lobachevski se calificaba por sus contemporáneos, e incluso por sus discípulos, como un disparate monstruoso, como un desafío audaz a las leyes de la lógica y del sentido común [2]. No nos asombra tal actitud respecto a la

[1] Posteriomente se puso en claro que, además de la geometría descubierta por Lobachevski, se pueden construir otras muchas geometrías no euclídeas.

[2] Desde luego, no puede sospecharse infundadamente de ineptitud de los sabios contemporáneos de Lobachevski por la incomprensión de su invento: es posible que muchos de ellos no emitieron su opinión respecto al invento por pertenecer las investigaciones de Lobachevski a una rama que no entraba en la esfera de sus intereses científicos; también se sabe que el célebre matemático alemán Carlos Gauss y el eminente geómetra húngaro Juan Bolyai, que independientemente de Lobachevski llegaron a la conclusión de la posibilidad de construir una geometría no euclidiana, compartían los puntos de vista de éste. Sin embargo, Gauss, temiendo ser incomprendido y ridiculizado, nunca intervino en la prensa apoyando las ideas de Lobachevski, y Bolyai, viendo que sus propias investigaciones de la geometría no euclidiana (publicadas en el año 1832) no fueron reconocidas, se apartó de los ejercicios matemáticos. De tal modo, Lobachevski tuvo que luchar solitariamente justificando sus ideas.

idea genial que demolía las nociones de aquella época. Con la misma hostilidad también había sido acogida la teoría heliocéntrica de Copérnico, que negaba aquello que parecía ser absolutamente evidente y afirmaba aquello que parecía ser inconcebible. Se requerían consideraciones muy profundas para comprender la admisibilidad de dos geometrías diferentes. A continuación pasamos precisamente a exponer algunas de estas consideraciones, las más comprensibles.

En los manuales escolares de geometría, en la parte "Planimetría", se estudia el plano independientemente del espacio que lo rodea; con otras palabras; la planimetría es la geometría del plano euclidiano. También han sido bien estudiadas las geometrías de ciertas superficies curvilíneas; puede servir de ejemplo la geometría esférica, que encuentra amplio uso en la astronomía y en otras ramas de la ciencia.

En toda ciencia los conceptos simplísimos tienen mucha importancia. En la geometría euclidiana semejantes conceptos son el punto, la recta, el plano. Estas denominaciones se conservan también en las geometrías no euclidianas, llamándose "recta" a la línea por la que se mide la distancia más corta entre dos puntos y "plano" a la superficie que tiene la siguiente propiedad: si dos puntos de la "recta" pertenecen a esta superficie, resultara ser que todos los puntos restantes de la misma "recta" también pertenecen a dicha superficie. Por ejemplo, en la geometría esférica, se denominan "plano" y "rectas", respectivamente, a la esfera y a las circunferencias de sus círculos grandes. Esta terminología es completamente oportuna ya que en cualquiera de las geometrías la "recta" es la línea más simple y el "plano" es también la superficie más simple y, además, la primera tiene la propiedad más importante de la recta euclidiana y el segundo, la propiedad más importante del plano euclidiano [1].

Señalaremos algunas singularidades de la geometría esférica. Para mayor evidencia la examinaremos como la geometría de la superficie del globo. No es difícil comprender que dos "rectas" de esta geometría (por ejemplo, dos meridianos) siempre se cortan en dos puntos del globo diametralmente opuestos. Después, la suma de los ángulos del triángulo esférico es mayor que $2d$; por ejemplo, en el triángulo limitado por un cuarto del ecuador y

[1] Advertiremos que en la geometría proyectiva falta la noción de distancia entre dos puntos; en el caso de una geometría de tal género la interpretación de las nociones "recta" y "plano", expuesta anteriormente, es inaplicable.

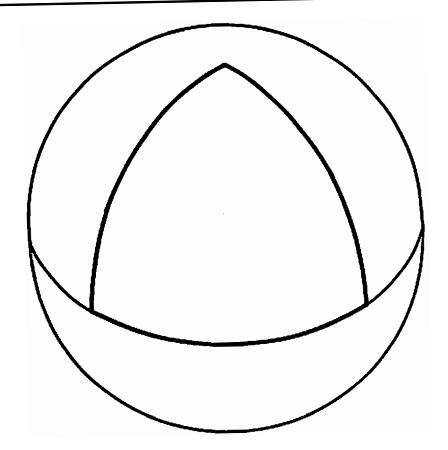


FIG. 1

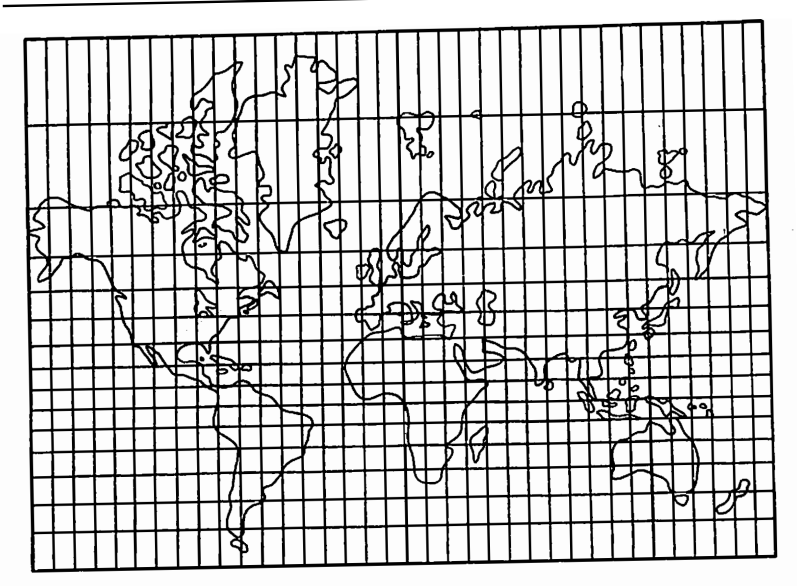


FIG. 2

por los arcos de dos meridianos (fig. 1) todos los tres ángulos son rectos [1].

Es sabido que en la geografía, a la par con el globo, se utilizan mapas de la superficie terrestre. Esto equivale al estudio de la geometría esférica mediante el examen de los mapas de la esfera, hecho posible si se indica de qué manera se hallan por medio de las efigies de las líneas en el mapa sus longitudes reales y las magnitudes reales de los ángulos entre ellas. La cosa consiste en que en el mapa se obtienen efigies desfiguradas y el carácter de esta desfiguración no es el mismo en todas partes. Por ejemplo, en el mapa de la superficie terrestre ejecutado en la proyección de Mercator [2] (fig. 2) a los meridianos les corresponden líneas rectas paralelas a las que son perpendiculares otras líneas rectas, equivalentes a los paralelos geográficos y, al mismo tiempo, el segmento que representa 1° del paralelo tiene, independientemente de su latitud, una misma longitud, mientras que en la realidad la longitud del grado de un paralelo es tanto menor cuanto más elevada es su latitud.

En vista de que la superficie tiene dos dimensiones se ha aceptado denominar bidimensional a la geometría que estudia las figuras que se encuentran sobre una superficie determinada, y denominar espacio bidimensional a la propia superficie. Desde hace mucho tiempo se conocen dos variedades de la geometría bidimensional: la euclidiana (para el plano) y la esférica. Al hecho de existir una geometría bidimensional no euclidiana los matemáticos no le daban gran importancia por la simple razón de que la esfera se estudiaba en el espacio euclidiano tridimensional, y esto obligaba a olvidar las propiedades no euclidianas de la esfera como tal.

Como resultado de las investigaciones de Lobachevski se puso en claro que no sólo son concebibles las superficies con propiedades no euclidianas, sino que también lo son los espacios no euclidianos tridimensionales.

La introducción del concepto de las geometrías tridimensionales no euclidianas puede provocar dudas si no se hacen las aclaraciones siguientes.

---

[1] Se denomina ángulo entredos líneas en el punto de su intersección al ángulo entre las tangentes a éstas en dicho punto.

[2] *Gerardo Mercator* (1512–1594) – eminente cartógrafo flamenco. La proyección cartográfica propuesta por él en el año 1569 obtuvo una divulgación general y, desde entonces, las cartas marítimas se ejecutan en esta proyección.

A veces es cómodo representar en forma geométrica los resultados del estudio de una clase determinada de fenómenos. Por ejemplo, los datos concernientes al incremento de la productividad del trabajo frecuentemente se exponen en forma de gráficas y diagramas. Esto demuestra que mediante imágenes geométricas se pueden describir diversos procesos y estados reales que no tienen relación directa con la geometría.

Si se considera la gráfica como una línea del plano euclidiano, es evidente que en el ejemplo expuesto anteriormente se han empleado imágenes de la geometría euclidiana bidimensional. En otros casos más complicados se tiene que recurrir a las geometrías euclidianas y no euclidianas tridimensionales e, incluso, polidimensionales. De esto no se debe deducir que todas ellas describen relaciones de extensión; éstas son teorías que, en sus formulaciones, utilizan términos geométricos a los que, hablando en general, se les atribuye un contenido no ligado a las nociones espaciales. Así, por ejemplo, al agregar el tiempo a las tres dimensiones del espacio real en calidad de una cuarta dimensión, introducimos el concepto de espacio cuatridimensional en el que el intervalo determinado de tiempo se considera como un "segmento de la recta". En la mayoría de los casos semejante enfoque crea solamente la apariencia de claridad, cosa que, hasta cierto grado, facilita el análisis del fenómeno que se estudia por este método.

De tal modo, la construcción de las geometrías no euclidianas se justifica por la posibilidad de utilizar sus deducciones para objetos que en la realidad existen. La circunstancia de que estas deducciones se formulan con términos de la geometría no tiene importancia esencial: las formulaciones geométricas se pueden modificar fácilmente de tal manera que correspondan a las propiedades de los objetos y fenómenos que se estudian.

Advertiremos que en las aplicaciones de la matemática, en aquellos casos en los que la teoría presta servicio a objetos que se someten a unas mismas leyes matemáticas aunque cualitativamente son diferentes, se practica con frecuencia la sustitución de unos conceptos por otros [1].

Se debe hablar especialmente de las geometrías tridimensionales. Estas pueden considerarse, independientemente de otras aplicaciones

[1] Respecto al empleo práctico de este principio véase el artículo "Simulación" en el libro de *V. G. Boltianski* "¿Qué es el cálculo diferencial?" (serie de "Lecciones populares de matemáticas", Editorial Mir, Moscú).

que tengan, como hipótesis que pretenden a describir las propiedades del espacio real. La cuestión respecto a cuál de estas hipótesis está más cerca de la realidad solamente puede ser resuelta mediante la comprobación experimental de sus tesis.

Señalaremos el hecho siguiente, muy importante para la exposición ulterior: en el plano euclidiano se puede construir (así como se hace para la esfera y, además, no por un solo procedimiento) la carta del plano de Lobachevski. El estudio de una de semejantes cartas se admitirá en nuestro libro como base para el estudio de la geometría hiperbólica.

Es característico que la geometría de Lobachevski obtuvo reconocimiento general en las circunstancias siguientes. En el año 1868 el matemático italiano Eugenio Beltrami descubrió que en el espacio euclidiano existe una superficie que tiene las propiedades del plano de Lobachevski, mejor dicho, de cierto pedazo de este plano (si se consideran como "rectas" en esta superficie las líneas más cortas). Este descubrimiento, que al poco tiempo condujo a la construcción de diferentes cartas del plano de Lobachevski, convenció a los sabios de la justeza de las ideas del gran geómetra ruso, sirvió de impulso para el estudio profundo de sus obras y dio comienzo a numerosas investigaciones en la rama de las geometrías no euclidianas.

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas planteó ante la física un problema extraordinariamente complejo: aclarar si el espacio físico real es euclidiano, como antes pensaban, y si no lo es, a qué tipo de espacios no euclidianos pertenece[1]. Para la solución de este problema se requiere una comprobación experimental de la justeza de los axiomas, estando claro que con el perfeccionamiento de los instrumentos de medición aumenta la seguridad de los datos experimentales obtenidos y aparece la posibilidad de penetrar en detalles que antes se escapaban de la atención de los investigadores.

Así pues Lobachevski retornó la geometría a la interpretación materialista de los axiomas como proposiciones que constatan las propiedades geométricas fundamentales del espacio y que fueron concebidos por el hombre como resultado del experimento.

Actualmente es imposible considerar resuelta hasta el fin la cuestión respecto a la estructura geométrica del espacio físico real.

---

[1] Al examinar esta cuestión se debe tener en cuenta la posibilidad de que el espacio real sea heterogéneo, es decir, la circunstancia de que su estructura geométrica pueda resultar no ser igual en todas partes.

No obstante, señalaremos que la teoría contemporánea de la relatividad, basándose en numerosos datos, considera que el espacio real no es euclidiano y que además, por sus propiedades geométricas, es mucho más complejo que el espacio de Lobachevski. Uno de los golpes más fuertes a la convicción de que la estructura del espacio real era euclidiana le asestó el descubrimiento de la ley física de acuerdo a la cual no existe velocidad alguna que supere la velocidad de la luz.

Ahora podemos responder a una pregunta que con frecuencia oímos: ¿cuál de las dos geometrías es la verdadera, la de Euclides o la de Lobachevski?

Semejante pregunta no surge respecto a las geometrías bidimensionales euclidiana y esférica; es absolutamente obvio que ambas son verdaderas, pero cada una de ellas tiene su campo de aplicación: no pueden ser usadas las fórmulas de la geometría esférica para las figuras planas, así como no pueden ser usadas las fórmulas de la geometría bidimensional euclidiana para las figuras en la esfera. Esto mismo es también justo respecto a las diversas geometrías tridimensionales: cada una de ellas, siendo lógicamente incontradictoria, encuentra empleo en una rama determinada, no siendo obligatorio que ésta sea geométrica; no obstante, cada una de ellas se negará a servir si a sus principios se les atribuye un carácter universal.

La cuestión referente a la estructura del espacio real, como ya señalábamos, pertenece a la competencia de la física y no puede ser resuelta con las fuerzas de la geometría pura. Su particularidad consiste, entre otras cosas, en que ninguna geometría refleja las relaciones de extensión con exactitud absoluta; así, por ejemplo, debido a la estructura molecular de la materia, no existen cuerpos accesibles a la apreciación de sus dimensiones que posean las propiedades geométricas de la esfera ideal. Precisamente por esto, la aplicación de reglas geométricas a la solución de problemas concretos conduce inevitablemente a resultados aproximados. De tal modo, nuestra noción respecto a la estructura geométrica del espacio real se reduce de hecho a la convicción científicamente basada de que una geometría determinada describe mejor que otras las relaciones reales de la extensión.

Por el hecho de que en la teoría de la relatividad se utilizan fórmulas de la geometría no euclidiana no se deduce todavía la necesidad de entregar la geometría de Euclides al archivo, tal y como ocurrió con la astrología, la alquimia y otras pseudociencias semejantes. Tanto una como otra geometría representan

un instrumento para el estudio de las formas espaciales, pero la primera permite efectuar investigaciones más detalladas, mientras que la segunda es suficiente para la solución de la inmensa mayoría de problemas prácticamente importantes de muy elevado grado de exactitud y como, además, se distingue por ser muy simple, siempre le estará asegurada una amplia aplicación.

Al terminar nuestro breve esbozo señalaremos aquello nuevo que aportó Lobachevski en el desarrollo de las ideas geométricas.

Los méritos científicos de este notable pensador no se agotan con el hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenario del axioma del paralelismo; la importancia de sus investigaciones es inmensurablemente más amplia.

Habiendo sometido a un análisis crítico uno de los axiomas euclidianos, Lobachevski dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que posteriormente condujo a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la geometría y de otras ciencias matemáticas.

El descubrimiento por Lobachevski de la geometría hiperbólica sacó a la ciencia concerniente a las formas espaciales de los estrechos límites del sistema euclidiano. La geometría de Lobachevski encontró aplicación directa en la teoría de integrales definidas y en otras ramas de la matemática.

Lobachevski suscitó la elaboración de cuestiones que no podían surgir con el estado precedente de la matemática y, entre ellas, la cuestión respecto a la estructura geométrica del espacio real. Sin su descubrimiento no hubiera podido desarrollarse la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la física contemporánea. Partiendo de las investigaciones de Lobachevski los sabios construyeron una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico.

Para concluir señalaremos la importancia gnoseológica [1] de las ideas del gran matemático ruso. Antes de Lobachevski, durante el transcurso de muchos siglos, reinaba en la geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, el filósofo de la Grecia antigua: atribuyendo a los axiomas del sistema euclidiano un carácter absoluto éste negaba su procedencia experimental. Lobachevski rompió categóricamente con este punto de vista y retornó la geometría a las posiciones del materialismo.

---

[1] Gnoseología es la ciencia del conocimiento.

§ 3. INVERSIÓN

Supongamos que se enseñó una regla que permite pasar de cualquier figura dada a otra, de tal manera que la segunda figura queda absolutamente determinada si se ha dado la primera, y viceversa. Dicho paso se denomina transformación geométrica. La inversión, a la par con la traslación paralela, la transformación de similitud, el giro de la figura y la proyección, pertenece también al número de transformaciones geométricas más usuales. Por ejemplo, esta transformación se utiliza ampliamente en la matemática como método para la resolución de problemas de construcción, en la teoría de las funciones de variable compleja, en el estudio de las cartas de la superficie de Lobachevski.

En el párrafo presente damos la determinación de la inversión y de las nociones relacionadas con ella y examinamos una serie de sus propiedades fundamentales.

Supongamos que en el plano α se da la circunferencia k con el radio r y el centro O y el punto A diferente de O. Elijamos en la semirrecta OA el punto A', de tal manera que el producto de los segmentos OA y OA' sea igual al cuadrado del radio de la circunferencia k:

$$OA \cdot OA' = r^2. \qquad (1)$$

Convengamos decir que los puntos A y A' son *simétricos* respecto a la circunferencia k.

Si uno de los puntos A, A' se encuentra fuera de la circunferencia k, el otro se hallará en el interior de ésta, y viceversa; por ejemplo, de la desigualdad $OA > r$ deducimos, tomando en consideración la condición (1), que $OA' < r$. Si el punto A o A' se encuentra en la circuferencia k, resultará que A y A' coinciden.

Examinemos la fig. 3 donde AB es la tangente a la circunferencia k y BA' es la perpendicular a OA. Puesto que OA' es la proyección del cateto OB del triángulo rectángulo OAB sobre la hipotenusa OA

$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

y, por consiguiente, los puntos A y A' son simétricos respecto a k. De aquí que sea evidente la construcción del punto A', si se ha dado el punto A, y la del punto A si se ha dado el punto A'.

T e o r e m a 1. *Si la circunferencia q pasa por dos puntos diferentes A y A', simétricos respecto a la circunferencia k, resulta ser que las circunferencias k y q son ortogonales entre sí.*

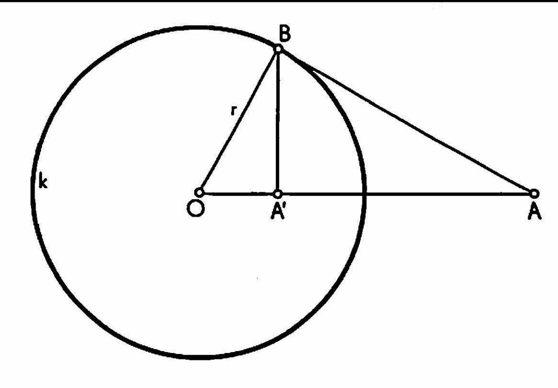


FIG. 3

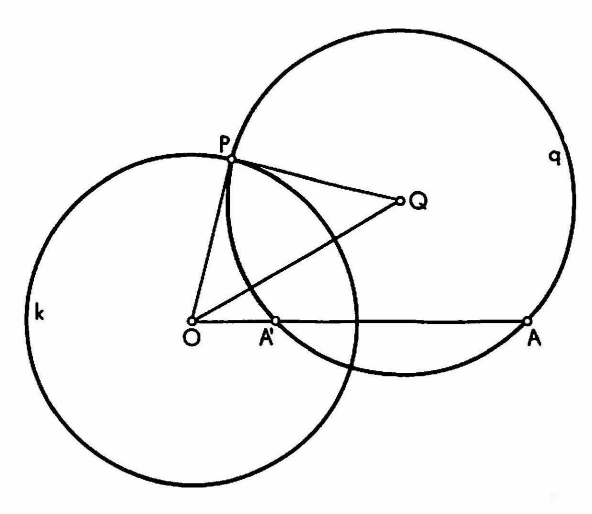


FIG. 4

Se denominan ortogonales dos circunferencias si éstas se cortan en ángulo recto, es decir, si las tangentes a ellas en el punto de intersección (o, lo que es lo mismo, sus radios trazados a este punto) son perpendiculares entre sí.

Sea P uno de los puntos de intersección de las circunferencias k y q (fig. 4). Como OP es el radio de la circunferencia k, la igualdad (1) adquiere el aspecto: $OA \cdot OA' = OP^2$. Por otro lado,

el producto de los segmentos OA y OA' es igual al cuadrado de la tangente trazada desde el punto O a la circunferencia q; entonces OP es la tangente a q. Por consiguiente, los radios OP y QP de las circunferencias dadas son perpendiculares entre sí, y estas circunferencias son ortogonales entre sí.

Advertiremos que cualquier circunferencia que pasa por dos puntos diferentes, simétricos respecto a una recta, corta a ésta en ángulo recto. La analogía de esta propiedad con el caso expuesto en el teorema 1 condicionó el traslado del término "simetría" para el caso de dos puntos situados de tal manera respecto a la circunferencia dada que cualquier circunferencia que pasa por ellos es ortogonal respecto a la circunferencia dada.

T e o r e m a 2. *Si las circunferencias k y q son ortogonales entre sí, resulta ser que la recta que pasa por el centro O de la circunferencia k y que corta la circunferencia q, corta a ésta en puntos simétricos respecto a k.*

Designemos por A y A' los puntos de intersección de esta recta con q, y por P uno de los puntos comunes de las circunferencias k y q (fig. 4). Puesto que las circunferencias dadas son ortogonales entre sí la recta OP es tangente a la circunferencia q y, por esto, $OA \cdot OA' = OP^2$. De aquí deducimos que los puntos A y A' son simétricos respecto a la circunferencia k.

T e o r e m a 3. *Sea dado el triángulo OAB*, donde O es el centro *de la circunferencia k, y los puntos A' y B', simétricos con A y B respecto a k. Entonces*

$$\angle OAB = \angle OB'A' \text{ y } \angle OBA = \angle OA'B'.$$

Examinemos la fig. 5. De la igualdad

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB',$$

que se deduce de la condición (1), obtenemos: $OA : OB' = OB : OA'$. Por consiguiente, los triángulos OAB y $OB'A'$, que tienen común el ángulo AOB, son semejantes. De aquí deducimos que el teorema es justo.

Señalaremos que alrededor del cuadrilátero $ABB'A'$ puede ser circunscrita una circunferencia de tal manera que $\angle A'AB + \angle A'B'B = 2d$. Del teorema 1 se deduce que esta circunferencia es ortogonal a la circunferencia k.

Examinemos ahora la transformación del plano α, que consiste en lo siguiente: cada dos puntos de este plano, simétricos respecto a la circunferencia k, intercambian de sitio. Semejante transforma-

ción se denomina *inversión*, la circunferencia k se denomina *circunferencia de inversión* y su centro es el *polo de la inversión*. Si la inversión respecto a k transforma la figura F en la figura F', se dice que F es simétrica con F', y que F' es simétrica con F respecto a la circunferencia k.

Advertiremos que no existe punto alguno simétrico al polo de la inversión respecto a la circunferencia de inversión.

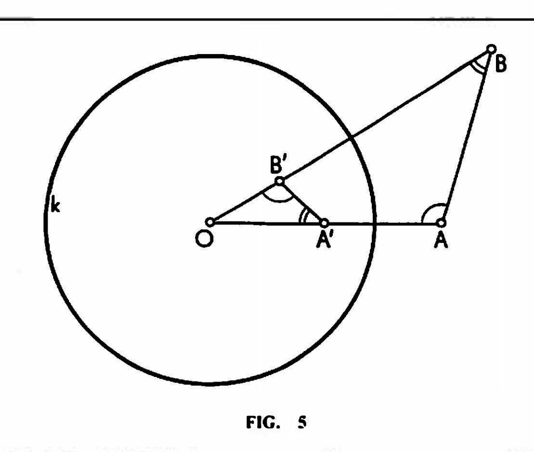


FIG. 5

No es difícil ver que los puntos que se encuentran fuera del círculo limitado por la circunferencia de inversión se transforman en puntos de este círculo, a excepción del polo de inversión, y viceversa; los puntos de la circunferencia de inversión se pasan a sí mismos; la recta que pasa por el polo de inversión O se pasa a sí misma, pero pierde con ello el punto O.

Teorema 4. *La inversión transforma la recta que no pasa por el polo de inversión en una circunferencia que pasa por el polo de inversión.*

Supongamos que A es la base de la perpendicular bajada desde el polo de inversión O sobre la recta l, B es un punto cualquiera de la recta l y A' y B' son los puntos simétricos, respectivamente, con A y B en relación a la circunferencia de inversión k (fig. 6). Construyamos en el segmento OA', como en el diámetro, la circunferencia q. En virtud del teorema 3 $\angle OB'A' = \angle OAB$ y, por esto, $\angle OB'A' = d$; por consiguiente, el punto B' se encuentra en

la circunferencia *q*. Por otro lado, sea *C'* cualquier otro punto diferente de *O* en la circunferencia *q*; entonces la recta *OC'* cortará *l* en cierto punto *C* que, como es fácil ver, durante la inversión dada se convertirá en el punto *C'*. Así pues, el teorema ha sido demostrado, pero es menester tener en cuenta que la recta *l* se transforma en una figura compuesta por la circunferencia *q sin el punto O.*

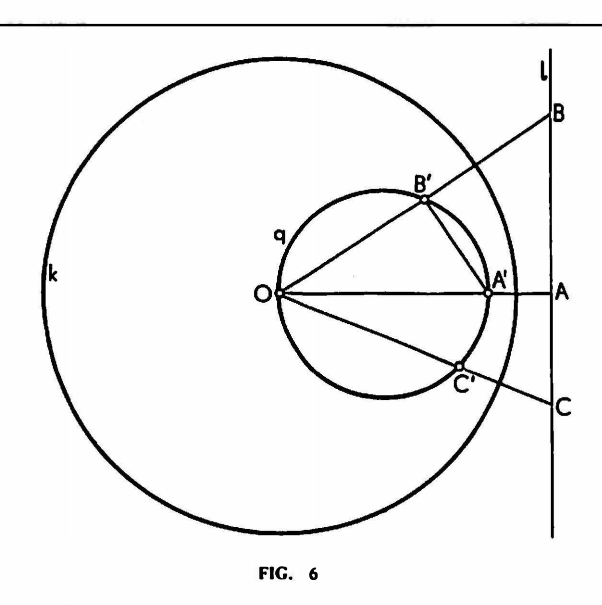


FIG. 6

Advertiremos que el centro de la circunferencia *q* pertenece a la perpendicular bajada desde *O* sobre *l*.

Si la recta *l* no tiene puntos comunes con la circunferencia de inversión *k*, entonces la circunferencia *q* se encuentra en el interior de *k*.

Si *l* hace contacto con *k* en cierto punto, entonces *q* hará contacto con *k* en el mismo punto.

Si *l* y *k* se cortan, entonces *q* pasará por el punto de su intersección.

T e o r e m a 5. *La inversión transforma la circunferencia que pasa por el polo de inversión en una recta que no pasa por el polo de inversión.*

Supongamos que O (el polo de inversión), A y B son tres puntos diversos de la circunferencia q, y A' y B' son puntos simétricos con A y B respecto a la circunferencia de inversión. En virtud del teorema 4 la recta $A'B'$ se transforma en una circunferencia que pasa por O, A y B, es decir, en la circunferencia q, y de aquí se deduce que q se transforma en la recta $A'B'$.

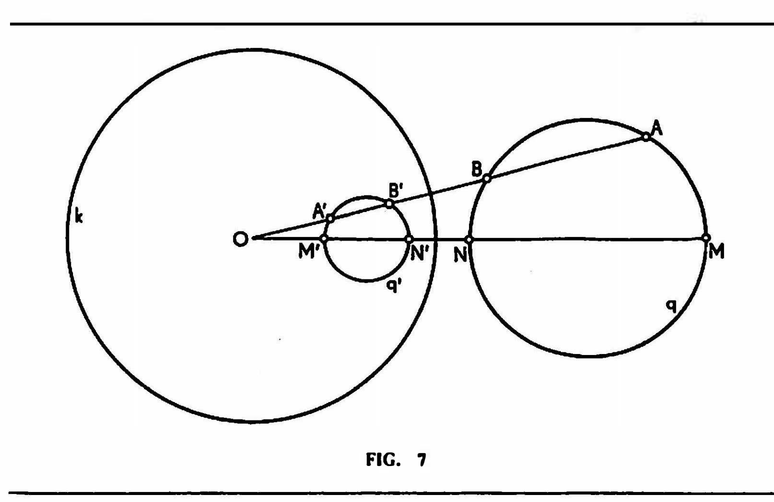


FIG. 7

Teorema 6. *La inversión transforma la circunferencia que no pasa a través del polo de inversión en una circunferencia que tampoco pasa por el polo de inversión.*

Sean k la circunferencia de inversión con el radio r y el centro O, y q, la circunferencia dada que no pasa por O (fig. 7). Tomemos en q un punto cualquiera A y designemos por B el segundo punto de intersección de la recta OA con q, y designemos por A' y B' los puntos respectivamente simétricos con A y B respecto a k. Entonces

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2.$$

De aquí

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} \tag{2}$$

y

$$OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4.$$

El producto

$$OA \cdot OB = g,$$

en virtud de los conocidos teoremas de la geometría elemental, no varía al desplazar el punto A por q. Por consiguiente, g es una magnitud constante que es positiva si O se encuentra fuera de q, y que es negativa si O se encuentra en el interior de q (ya que en este último caso las direcciones de los segmentos OA y OB son opuestas).

De las dos igualdades últimas hallamos: $OA' \cdot OB' = \frac{r^4}{g}$ y, por lo tanto,

$$\frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g^2}{r^4},$$

o, teniendo en cuenta la relación (2),

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$$

(el signo está bien elegido pues los segmentos OB y OB' tienen una misma dirección). De la última igualdad se deduce que las figuras descritas por los puntos A y B' son semejantes; por consiguiente, el teorema está demostrado: el punto B' describe una circunferencia (que designaremos por q').

El polo de inversión O será el centro de similitud de las circunferencias q y q', y resultará ser exterior si $g > 0$ e interior si $g < 0$. En el primer caso O se encuentra fuera y en el segundo, dentro de las circunferencias q y q'.

Si la circunferencia q hace contacto con la circunferencia k en cierto punto, entonces q' hará contacto con k en ese mismo punto.

Si las circunferencias k y q se cortan, entonces q' pasará por el punto de su intersección.

La circunferencia q es ortogonal a k y, durante la inversión, se transforma en sí respecto a k (q' coincide con q), hecho que se deduce del teorema 2.

Si la línea de los centros de las circunferencias k y q corta q en los puntos M y N (donde M' y N' son los puntos simétricos a M y N respecto a k), entonces el segmento $M'N'$ será

el diámetro de la circunferencia q' (fig. 7). Al construir la circunferencia q' se puede hacer uso de esta observación.

Señalaremos que los centros de las circunferencias q y q' no son simétricos respecto a la circunferencia de inversión k.

Teorema 7. *Los puntos de intersección de dos circunferencias p y q, ortogonales a la circunferencia k, son simétricos respecto a k.*

El teorema es obvio, ya que cada una de las circunferencias p y q, durante la inversión respecto a k, se transforma en sí y, por consiguiente, los puntos de su intersección A y A' permutarán de lugar (fig. 8).

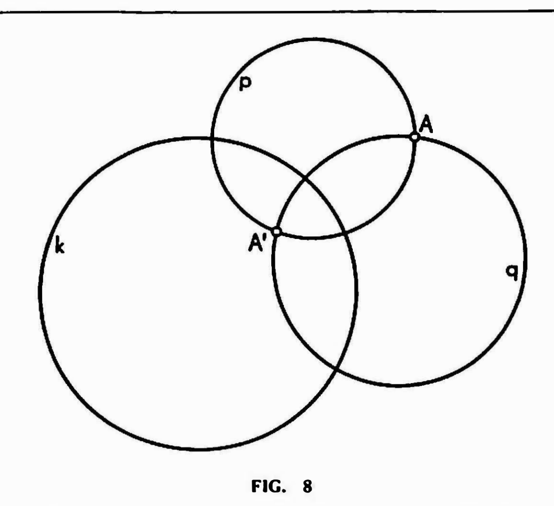


FIG. 8

Teorema 8. *Si M y M' son puntos simétricos respecto a la circunferencia k de dos líneas m y m', que también son simétricas respecto a k, resulta ser que las tangentes a m y m' en los puntos M y M' o bien son perpendiculares a la recta MM', o bien forman con ésta un triángulo isósceles con base MM'.*

Tomemos en m el punto N, diferente de M, y construyamos el punto N', simétrico a N respecto a k (fig. 9). Es evidente que N' pertenece a m'. Las rectas MM' y NN' pasan por el centro O de la circunferencia k. Construyamos las rectas MN y $M'N'$; sea así que éstas se cortan en el punto P. Si

$$\angle MON = \theta, \quad \angle OMN = \varphi,$$

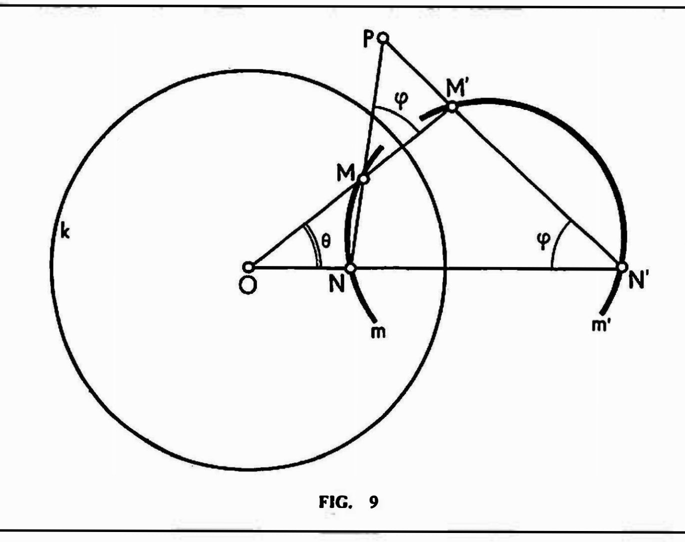


FIG. 9

en virtud del teorema 3, $\angle ON'M' = \varphi$. Por esto, en el triángulo $MM'P$

$$\angle M = \varphi, \quad \angle M' = \varphi + \theta.$$

Supongamos que el ángulo θ tiende a cero en la condición de que el punto M es inmóvil. Entonces, en el límite, las secantes MN y $M'N'$ pasarán a ser tangentes a m y m' en los puntos M y M', y el triángulo $MM'P$ se convertirá en isósceles. Efectivamente,

$$\lim_{\theta \to 0} (\varphi + \theta) = \lim_{\theta \to 0} \varphi + \lim_{\theta \to 0} \theta = \lim_{\theta \to 0} \varphi.$$

De tal manera, el teorema queda demostrado.

Teorema 9. *La inversión no varía la magnitud del ángulo.*

Examinemos las líneas m y n, que se cortan en el punto A. Supongamos que m, n y A se transforman en m', n' y A' durante la inversión respecto a la circunferencia k. Del teorema 8 se deduce que el ángulo entre las tangentes a m y n en el punto A es igual al ángulo entre las tangentes a m' y n' en el punto A', que es lo que se quería demostrar.

A la transformación que no varía la magnitud de los ángulos se la denomina transformación *conforme*. De lo precedente se deduce que la inversión es una transformación conforme.

§ 4. CARTA DEL PLANO DE LOBACHEVSKI

Examinemos el plano ω y, en él, la recta *u*, que divide a ω en los semiplanos τ y τ'. Supongamos que el semiplano τ representa la carta de cierto espacio bidimensional *H*. Vamos a diferenciar la longitud *s* de la línea del espacio *H* y la longitud σ de la imagen de esta línea en la carta dada; a las magnitudes *s* y σ las denominaremos, respectivamente, longitudes *hiperbólica* y *euclidiana.*

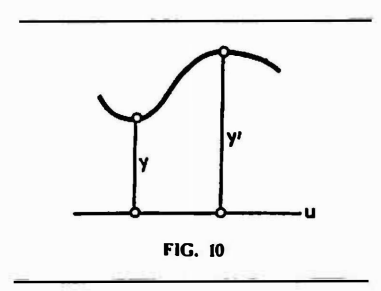


FIG. 10

Para la medición de longitudes en la carta que examinamos pondremos como base los principios siguientes.

1°. La longitud hiperbólica del segmento MN, que es paralelo a la recta *u* y que se encuentra de ésta a la distancia *y*, es igual a $\frac{MN}{y}$, es decir, es igual al cociente de la división de la longitud euclidiana de este segmento por su distancia euclidiana de *u*.

2°. Si σ es euclidiana, *s* es la longitud hirepbólica del arco de la curva (o del segmento de la recta no paralela a *u*), *y* e *y'* son, respectivamente, las distancias euclidianas mínima y máxima de sus puntos a *u* y, al mismo tiempo, $y \neq 0$ (fig. 10), resulta ser que se cumple la desigualdad:

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}.$$

Más tarde nos convenceremos de que el espacio *H*, cuya carta posee las propiedades citadas más arriba, es el plano de Lobachevski.

Partiendo de los principios 1º y 2º no es difícil indicar el procedimiento general de medición de las longitudes hiperbólicas.

Hallaremos al principio la longitud hiperbólica s del arco AB, que posee las propiedades siguientes: si el punto se desplaza por este arco desde A hacia B, su distancia de la recta u crece; la distancia del punto A a u no es igual a cero; el arco AB es suave, es decir, no tiene inflexiones (fig. 11).

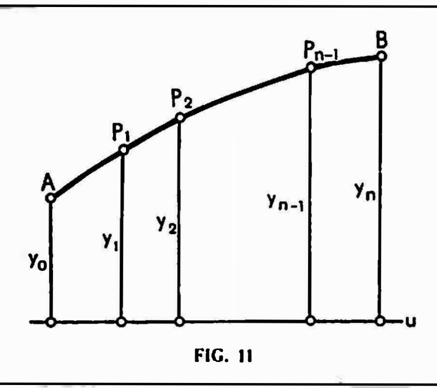


FIG. 11

Marquemos en el arco AB, siguiendo de A hacia B, los puntos

$$A,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{n-1},\ B. \qquad (*)$$

Supongamos que las magnitudes

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y_n,$$

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,$$

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_n$$

designan, respectivamente, la distancia euclidiana de los puntos (*) respecto a la recta u; las longitudes euclidianas de los arcos AP_1, P_1P_2, $\ldots$, $P_{n-1}B$, que son partes del arco AB; las longitudes euclidianas de las cuerdas que comprenden estos arcos.

Formemos las sumas:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_n},$$

$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}},$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \ldots + \frac{\zeta_n}{y_n}.$$

En virtud del 2º principio tendremos:

$$\Sigma < s < \Sigma', \tag{3}$$

ya que, de acuerdo a la condición, $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Examinemos la diferencia

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{n-1}).$$

El segundo miembro de esta igualdad aumentará si se sustituyen cada una de las magnitudes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ por la mayor de ellas (que designaremos por σ') y cada denominador se sustituye por y_0^2. Por consiguiente,

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots + y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2}(y_n - y_0).$$

Si σ' tiende a cero, de esta desigualdad se deduce que la diferencia $\Sigma' - \Sigma$ también se aproxima a cero.

Transformemos ahora la suma Z hasta que adquiera el aspecto de

$$Z = \frac{\sigma_1}{y_1} \cdot \frac{\zeta_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} \cdot \frac{\zeta_2}{\sigma_2} + \ldots + \frac{\sigma_n}{y_n} \cdot \frac{\zeta_n}{\sigma_n}.$$

De aquí, designando por α la menor y por β la mayor de las relaciones

$$\frac{\zeta_1}{\sigma_1}, \frac{\zeta_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\zeta_n}{\sigma_n},$$

obtenemos

$$\alpha\Sigma \leqslant Z \leqslant \beta\Sigma. \tag{4}$$

Supongamos que el número n aumenta ilimitadamente y supongamos que al mismo tiempo cada una de las magnitudes σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y, por consiguiente, la magnitud σ' tienden a cero. Entonces la diferencia $\Sigma' - \Sigma$ se aproximará, como demostramos anteriormente, a cero, mientras que las magnitudes α y β tienden a la unidad [1]. Debido a esto de las desigualdades (3) y (4) se deduce que cada una de las sumas Σ, Σ', Z se aproximará a un mismo límite y que éste será igual a la longitud hiperbólica s del arco AB.

[1] Es sabido que la relación de la cuerda del arco que ésta comprende tiende a la unidad cuando la longitud del arco se aproxima a cero (aquí tenemos en cuenta un arco de una línea suave).

Lo más cómodo es utilizar la suma Z, puesto que en ella figuran las longitudes de los segmentos euclidianos y no las de los arcos. Así pues

$$s = \text{lím}\, Z = \text{lím}\left(\frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \ldots + \frac{\zeta_n}{y_n}\right), \tag{5}$$

donde la transición al límite se efectúa en las condiciones indicadas anteriormente.

Advertiremos que en la igualdad (5) por y_1 se puede admitir la distancia entre cualquier punto del segmento AP_1 y la recta u, por y_2 se puede admitir la distancia entre cualquier punto del segmento P_1P_2 y u, etc. Con esto la suma Z puede cambiar su magnitud, pero su límite no variará.

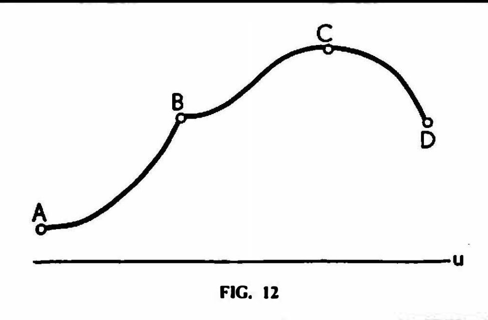


FIG. 12

Si el arco de cierta línea se puede dividir en un número finito de partes que satisfagan las condiciones expuestas más arriba para el arco *AB*, resulta ser que la longitud hiperbólica de este arco representa la suma de las longitudes hiperbólicas de dichas partes. Por ejemplo, el arco *AD*, expuesto en la fig. 12, lo dividimos en las partes *AB*, *BC* y *CD*, pero los puntos de división los marcamos en el arco *CD* partiendo desde *D* hacia *C*.

Supongamos que los puntos del semiplano τ se desplazan de tal manera que la longitud hiperbólica de cualquier arco perteneciente a este semiplano es igual a la longitud hiperbólica de este mismo arco en su nueva posición. Semejante desplazamiento de los puntos lo denominaremos *movimiento hiperbólico*. Este concepto es análogo al concepto del movimiento del plano euclidiano, por ejemplo, al giro del plano euclidiano en cierto ángulo alrededor de cualquier punto de dicho plano.

Si el movimiento hiperbólico transforma la figura F en F_1 entonces las figuras F y F_1 se denominan figuras hiperbólicamente iguales.

Examinemos los tipos más simples de movimientos hiperbólicos.

1) Si se traspasa cada punto del semiplano τ en una misma distancia y en una misma dirección paralelamente a la recta u, resulta que cada figura se transforma en otra hiperbólicamente igual a ella, pues no varía ni su magnitud euclidiana, ni la distancia de sus puntos a u.

De aquí deducimos que *el desplazamiento euclidiano del semiplano* τ *a lo largo de la recta es un movimiento hiperbólico.*

2) Supongamos que la transformación de similitud con centro en el punto arbitrario O de la recta u y con coeficiente positivo

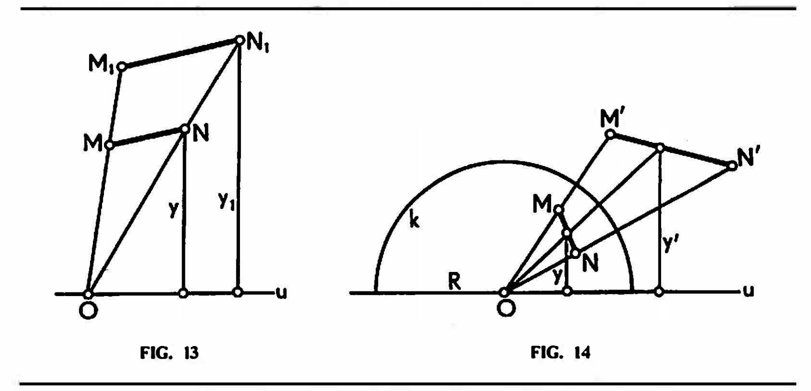


FIG. 13 FIG. 14

de similitud transforma el segmento MN en el segmento M_1N_1 (fig. .13). Designemos por y e y_1, respectivamente, las distancias de los puntos N y N_1 a la recta u. En virtud de la semejanza de los triángulos OMN y OM_1N_1 tendremos: $\frac{MN}{y} = \frac{M_1N_1}{y_1}$.

De aquí y de la igualdad (5) se deduce que durante dicha transformación no varía la longitud hiperbólica de un arco determinado de cualquier línea.

Por consiguiente, *la transformación de similitud con centro de similitud en la recta* u *y con coeficiente positivo de similitud es un movimiento hiperbólico.*

El coeficiente de similitud se elige positivo con el fin de que el segmento M_1N_1 resulte estar en el semiplano τ, y no en τ'.

3) Examinemos la inversión respecto a la circunferencia k del radio arbitrario R con el centro O en la recta u (fig. 14). Supongamos que M y N son puntos suficientemente cercanos entre sí, M' y N' son los puntos simétricos a los dos primeros respecto a la circunferencia k. Designemos por y e y' las distancias entre los puntos de intersección de la bisectriz del ángulo MON con los segmentos MN y $M'N'$ y la recta u. Puesto que los triángulos OMN y $ON'M'$ son semejantes, entonces

$$\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}.$$

De aquí y de la igualdad (5) deducimos que durante la transformación dada no varía la longitud hiperbólica de un arco determinado de cualquier línea.

Por consiguiente, *la inversión respecto a una circunferencia de cualquier radio con centro en la recta u es precisamente un movimiento hiperbólico.*

4) Y, por fin, no es difícil convencerse de que *la transformación de simetría respecto a un eje perpendicular a la recta u es precisamente un movimiento hiperbólico.*

Señalaremos que cada uno de los movimientos hiperbólicos examinados es una transformación conforme. Esto es evidente respecto a los desplazamientos del semiplano τ a lo largo de la recta u, y también en lo que se refiere a las transformaciones de similitud y de simetría; en cuanto a la inversión, su conformidad quedó demostrada en el § 3.

Puesto que el movimiento hiperbólico tiene la propiedad de pasar cualquier figura a otra hiperbólicamente igual, la transformación, que representa la secuencia de varios movimientos hiperbólicos, posee esa misma propiedad y, en virtud de ello, semejante transformación es también un movimiento hiperbólico.

Anotaremos sin demostración alguna que cualquier movimiento hiperbólico puede ser presentado en forma de secuencia de un número finito de movimientos hiperbólicos simplísimos que anteriormente examinamos.

Mostraremos ahora que en el semiplano τ, con las reglas de medición de longitudes establecidas para él, se cumplen las tesis de la geometría de Lobachevski.

Para ello tendremos que examinar en el semiplano τ ciertas figuras que se caracterizan por las mismas propiedades que las

respectivas figuras de la geometría de Euclides pero que, posiblemente, se diferencien de estas últimas por su forma; para ellas conservaremos los términos de la geometría euclidiana con el prefijo "hiperbólico": por ejemplo, denominaremos recta hiperbólica a la línea por la cual se mide la distancia hiperbólica más corta entre cualesquiera dos puntos de ella; denominaremos circunferencia hiperbólica al lugar geométrico de puntos que se encuentran a una misma distancia hiperbólica del punto dado.

Aclaremos cuáles líneas del semiplano τ son rectas hiperbólicas.

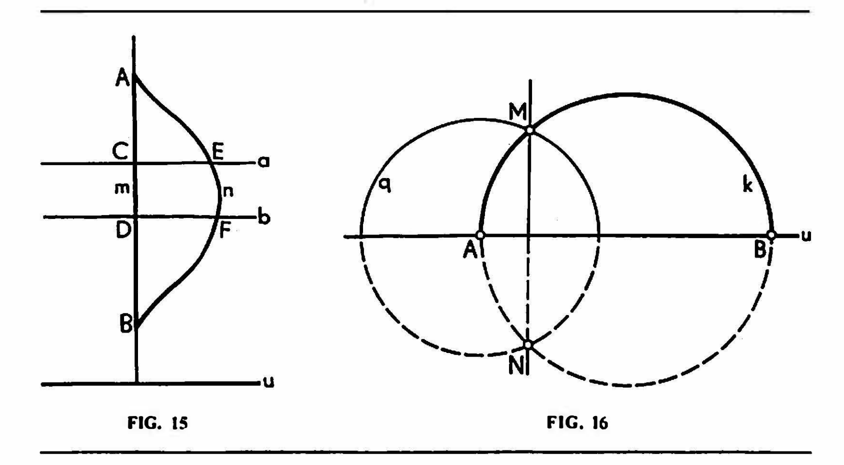


FIG. 15 FIG. 16

Ante todo serán rectas hiperbólicas las semirrectas euclídeas perpendiculares a la recta *u*, hecho que se deduce de las consideraciones siguientes.

Supongamos que los puntos *A* y *B* se encuentran en la perpendicular a la recta *u* (fig. 15). Unamos estos puntos con el segmento de la recta *AmB* y con cualquiera otra curva o quebrada *AnB*. Supongamos que dos rectas arbitrarias *a* y *b*, bastante próximas entre sí y paralelas a *u*, cortan el segmento *AmB* en los puntos *C* y *D* y la línea *AnB*, en los puntos *E* y *F*. Puesto que la longitud euclidiana del segmento *CD*, hablando en general, es menor que la longitud euclidiana del arco *EF* y sus longitudes hiperbólicas pueden considerarse iguales a $\frac{CD}{y}$ y $\frac{EF}{y}$, donde *y* es la distancia entre el punto *D* (o *F*) y la recta *u*, la longitud hiperbólica del

segmento CD, hablando también en general, es menor que la longitud hiperbólica del arco EF (estas longitudes hiperbólicas serán iguales entre sí solamente en la condición de que el arco EF sea un segmento de la recta euclidiana perpendicular a u; es evidente que esta condición no se cumple siempre, ya que, de lo contrario, el arco AnB coincidiría con el segmento AmB). De aquí se deduce que la longitud hiperbólica del segmento AmB es menor que la longitud hiperbólica del arco AnB, que es lo que se quería demostrar.

Demostraremos ahora que la semicircunferencia de la circunferencia euclidiana k con el centro en la recta u es también una recta hiperbólica.

Supongamos que k corta la recta u en los puntos A y B (fig. 16). Describamos la circunferencia q con el centro en el punto A y admitamos a ésta como circunferencia de inversión. Supongamos que k y q se cortan en los puntos M y N. Durante la inversión respecto a q la circunferencia k, que pasa por el polo de inversión, se transforma en la recta MN (véase el § 3). Ya que la inversión es un movimiento hiperbólico y la recta MN es perpendicular a u, se ve que la semicircunferencia k, mediante el movimiento hiperbólico, se transforma en una recta hiperbólica. Por consiguiente, esta semicircunferencia es también una recta hiperbólica.

De esta manera las semirrectas euclídeas perpendiculares a la recta u y las semicircunferencias euclidianas con el centro en la recta u serán las rectas hiperbólicas del semiplano τ. A continuación, examinando el axioma 1, nos convenceremos de que no existen otras rectas hiperbólicas.

Levantemos en el semiplano τ una perpendicular a la recta u por cualquier punto arbitrario M de ésta (fig. 17), elijamos en dicha perpendicular un punto A y construyamos los puntos A_1, A_2, A_3, ... de tal manera que se cumplan las igualdades:

$$AA_1 = A_1M, \; A_1A_2 = A_2M,$$
$$A_2A_3 = A_3M, \ldots$$

Con otras palabras, A_1 es el centro del segmento AM, A_2 es el centro del segmento A_1M, A_3 es el centro del segmento A_2M, etc.

Examinemos la transformación de similitud con centro de similitud M y coeficiente de similitud 1/2. Esta transformación es un movimiento hiperbólico que traspasa los puntos A, A_1, A_2, ... respectivamente, a los puntos A_1, A_2, A_3, ... De aquí

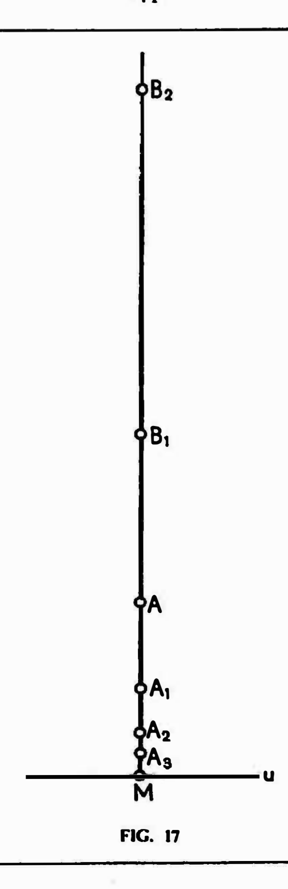


FIG. 17

se deduce que las longitudes hiperbólicas de los segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... son iguales entre sí. De este modo, la construcción efectuada por nosotros se reduce a trazar en la recta hiperbólica AM, desde el punto A, los segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., hiperbólicamente iguales entre sí, y, como se ve en la construcción, por muchos segmentos semejantes que construyamos, nunca alcanzaremos el punto M. Por consiguiente, M es un punto de la recta hiperbólica AM infinitamente alejado. Como M es un punto arbitrario de la recta u de lo anterior se deduce que todo punto de la recta u es un punto del semiplano infinitamente alejado.

El proceso del trazado de segmentos iguales entre sí AB_1,

B_1B_2, B_2B_3, ... en la recta hiperbólica AM (fig. 17) puede ser efectuado también en la dirección opuesta a la examinada más arriba, y este proceso también será infinito. De aquí se deduce que el punto de la recta AM, alejado infinitamente en el sentido de la geometría euclidiana, será al mismo tiempo un punto de la recta hiperbólica AM infinitamente alejado.

Cualquier punto de la recta hiperbólica AM, a excepción de los dos puntos indicados anteriormente, se encontrará a una distancia finita hiperbólica de A ya que, para un valor finito suficientemente grande del número entero positivo n, se encontrará o bien en el segmento AA_n, o bien en el segmento AB_n.

Así pues, la recta hiperbólica AM, y por lo tanto toda recta hiperbólica, tiene dos, y solamente dos, puntos infinitamente alejados.

Si la recta hiperbólica se expone como una semicircunferencia euclidiana con centro en la recta u, los puntos de intersección con u serán sus puntos infinitamente alejados.

Señalaremos que la recta euclidiana tiene sólo un punto infinitamente alejado; éste es el punto común de la recta dada y de todas las rectas paralelas a ella.

Ahora no es difícil convencerse de que en el semiplano τ se cumplen todos los axiomas del plano de la geometría de Lobachevski. Nos limitaremos a examinar dos axiomas.

Axioma 1. *Por dos puntos diferentes puede ser trazada una, y solamente una, recta hiperbólica.*

Si los puntos dados A y B se encuentran en la perpendicular euclidiana a la recta u, esta perpendicular será la recta hiperbólica que se busca. En caso contrario hallamos en la recta u el punto N, equidistante de A y B, y describimos desde el centro N con radio NA una semicircunferencia (fig. 18); ésta será la recta hiperbólica que buscamos.

Demostraremos que a través de dos puntos diferentes A y B no pueden pasar dos rectas hiperbólicas diferentes l y l'. Es suficiente suponer que A y B pertenecen a la perpendicular euclidiana l a la recta u (fig. 19), ya que cualquier otro caso se reduce a éste mediante el correspondiente movimiento hiperbólico. Para semejante disposición de los puntos A y B la distancia hiperbólica más corta entre ellos se mide, como se demostró anteriormente, solamente por la recta euclidiana l, por lo que en el segmento AB coinciden l y l'. Admitamos ahora que el punto C, que se encuentra en l', no pertenece a l, y que además B se encuentra en l' entre A y C. Entonces el arco AC de la semicircunferencia

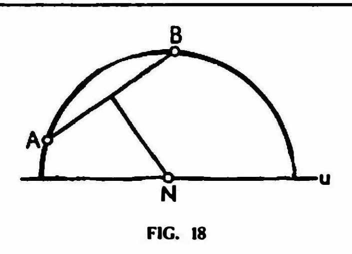


FIG. 18

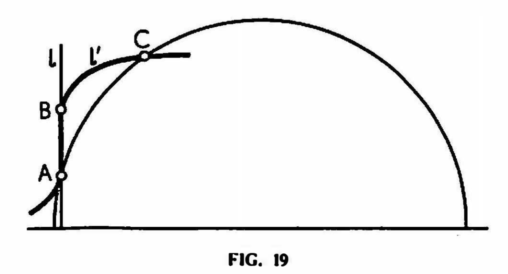


FIG. 19

euclidiana *k* con el centro en *u* pertenecerá a la recta hiperbólica, que en el segmento *AC* no coincide con *l'*, cosa que, como acabamos de ver, es imposible. Así pues, *l* y *l'* coinciden por completo.

De aquí se deduce que no existen otras rectas hiperbólicas que no sean las semirrectas euclidianas perpendiculares a *u* y las semicircunferencias euclidianas con centros en *u*: por cualesquiera dos puntos dados pasa una sola recta hiperbólica que, además, es de uno de estos dos tipos.

Axioma 2. *Por el punto P, que no pertenece a la recta hiperbólica p, pueden ser trazadas dos rectas hiperbólicas paralelas a p.*

Dos rectas hiperbólicas se llaman *paralelas* si tienen un punto común alejado infinitamente. En particular, las rectas hiperbólicas expuestas en forma de perpendiculares euclidianas a *u*, son paralelas: su punto común, alejado infinitamente, es el mismo en el semiplano τ que en el plano euclidiano ω.

Designemos por *A* y *B* (fig. 20) los puntos de la recta hiperbólica *p* infinitamente alejados. Tracemos a través de *P* y *A* la semicircunferencia euclidiana *m* con centro *M* en la recta *u*, y a través de *P* y *B* la semicircunferencia euclidiana *n* con centro *N* en *u*. Las semicircunferencias euclidianas *m* y *n* serán las rectas

hiperbólicas que buscamos; éstas serán paralelas a la recta hiperbólica *p* en sus diferentes direcciones: *m*, en la dirección de *B* hacia *A* y *n*, en la dirección de *A* hacia *B*.

Por el punto *P* pasan rectas hiperbólicas de tres géneros: 1) que cortan la recta *p*, 2) paralelas a *p*, y 3) que no cortan la recta *p* y no son paralelas a ésta.

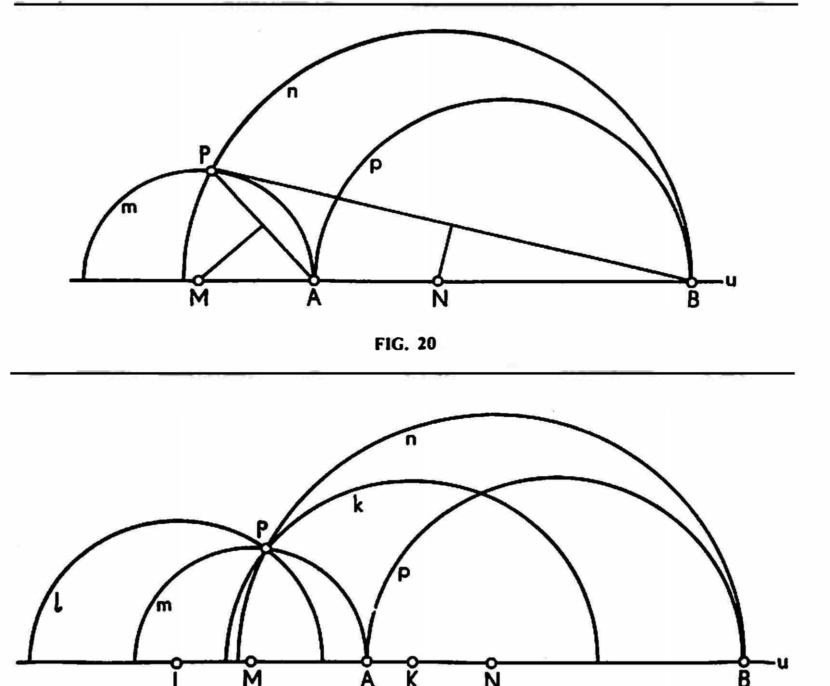


FIG. 20

FIG. 21

Existe una multitud infinita de rectas hiperbólicas del primer género, multitud infinita de rectas hiperbólicas del tercer género, y sólo dos del segundo género.

Para la construcción de una recta hiperbólica del primer género es menester desde cualquier punto arbitrario *K* del segmento *MN*, como desde el centro, describir una semicircunferencia *k* de radio *KP* (fig. 21). Si efectuamos esta misma construcción tomando por

el centro de la semicircunferencia un punto arbitrario L de la recta u, que se encuentre fuera del segmento MN, obtendremos la recta hiperbólica l del tercer género (la misma figura).

Ahora es obvio que el axioma 2 es equivalente al axioma del paralelismo de Lobachevski formulado en el § 2.

Si dos rectas hiperbólicas no se cortan y no son paralelas, se denominan *divergentes*. Por ejemplo, las rectas p y l (fig. 21) son divergentes.

De este modo, en el semiplano τ se cumplen los axiomas, y quiere decir que también los teoremas, de la geometría de Lobachevski. Por esto el semiplano τ, con las reglas de medición de longitudes que anteriormente se establecieron para él, representa el plano de Lobachevski, o, hablando más exactamente, la carta del plano de Lobachevski en el plano euclidiano.

Es aleccionador el comparar esta carta con la carta de la superficie terrestre ejecutada en la proyección de Mercator; en esta última los meridianos se exponen en forma de rectas paralelas a las que son perpendiculares las rectas que representan los paralelos (véase fig. 2 en la pág. 18). Se deben considerar "rectas" en la esfera las circunferencias de los círculos grandes y, en particular, los meridianos. Los paralelos, a excepción del ecuador, no son "rectas", pero en la carta se exponen en forma de rectas euclidianas. De manera análoga, en el semiplano τ, de todas las rectas euclidianas perpendiculares a la recta u y paralelas a ella, las primeras son rectas hiperbólicas y las segundas no (en el § 7 se hablará más detalladamente de éstas).

Después, la longitud del grado del paralelo es tanto menor cuan mayor es su latitud, pero en la carta de Mercator el segmento igual a 1° del paralelo, independientemente de la latitud del paralelo, tiene una misma longitud. Un cuadro análogo se observa también en el semiplano τ (véase principio 1°).

Es importante señalar que la carta τ es conforme, es decir, la magnitud euclidiana del ángulo en esta carta es igual a su magnitud real en el plano de Lobachevski.

Primero demostraremos esto para el caso de un ángulo recto. Describamos la semicircunferencia k con el centro en el punto M de la recta u y tracemos en M la perpendicular p a la recta u (fig. 22). Examinemos los ángulos *1*, *2*, *3*, *4*, formados por las rectas hiperbólicas k y p. Existe un movimiento hiperbólico que transforma los ángulos *1* en *2* y *3* en *4* (simetría respecto a p), y un movimiento hiperbólico que transforma los ángulos *1* en *3* y *2* en *4* (inversión respecto a k). De aquí se deduce que en

el plano de Lobachevski (igual que en la carta τ) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ y, por consiguiente, cada uno de estos ángulos es recto.

Aprovechando la configuración de la figura 22 designemos por A el punto de intersección de las líneas k y p, y por N, uno de los puntos de intersección de las líneas k y u (fig. 23). Describamos desde el centro N la semicircunferencia euclidiana n

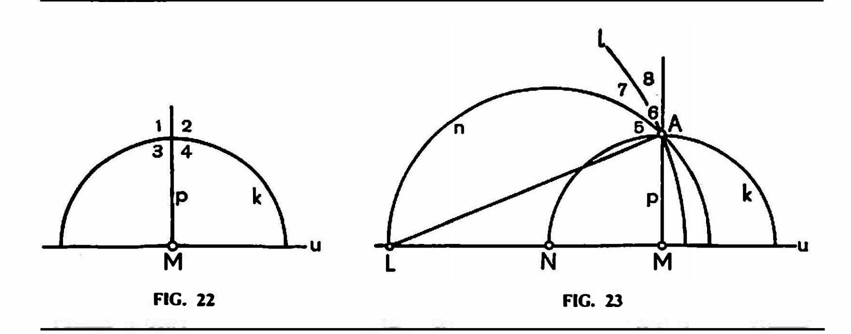


FIG. 22 FIG. 23

del radio NA. Esta dividirá el ángulo 1, expuesto en la fig. 22, en dos ángulos, 5 y 6, cuyas magnitudes euclidianas, como es fácil convencerse, son iguales entre sí. La inversión respecto a n transformará k en p y p en k y, por consiguiente, los ángulos 5 y 6 cambiarán de sitio. De aquí se deduce que no sólo son iguales entre sí las magnitudes reales (hiperbólicas) de éstos, es decir, en el plano de Lobachevski (igual que en la carta τ) cada uno de ellos es igual a la mitad de un ángulo recto.

Designemos por L el punto de intersección de las líneas u y n, que se encuentra al mismo lado del punto M que el punto N, y que es encuentra al mismo lado del punto M que el punto N, y describamos desde el centro L la circunferencia l del radio LA (fig. 23). Esta dividirá el ángulo 6 en los ángulos 7 y 8. No es difícil convencerse de que

$$\angle 8 = \angle NAL = \frac{l}{4}d,$$

y, como $\angle 6 = \frac{1}{2}d$, $\angle 7 = \frac{1}{4}d$ y, por consiguiente, las magnitudes euclidianas de los ángulos 7 y 8 son iguales entre sí. Al mismo tiempo también son iguales entre sí sus magnitudes hiperbólicas, pues durante la inversión respecto a la circunferencia l estos ángulos permutan de sitio.

De manera análoga demostramos que los ángulos que en la carta τ tienen la magnitud euclidiana de $\frac{1}{8}d$, $\frac{1}{16}d$, ..., tienen también esta misma magnitud en el plano de Lobachevski.

Puesto que todo ángulo puede ser figurado en forma de una suma de un número finito o también en forma del límite de la suma de un número ilimitadamente creciente de sumandos tipo

$$d, \frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d, \frac{1}{8}d, \frac{1}{16}d, \ldots,$$

la conformidad de la carta τ queda demostrada.

§ 5. LA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO DE LOBACHEVSKI

Aclaremos cómo se expresa en la carta τ la circunferencia del plano de Lobachevski.

Tracemos a través del punto M de la recta u la recta euclidiana p perpendicular a u, y elijamos en ella en el semiplano τ dos puntos arbitrarios B y C (fig. 24; $MB > MC$). Construyamos en p el punto A de tal manera que se cumpla la igualdad

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}. \tag{6}$$

De esta igualdad deducimos que las longitudes hiperbólicas de los segmentos CA y AB son iguales. Efectivamente, la transformación de similitud con centro de similitud M y coeficiente $\frac{CM}{AM}$ pasa el segmento AB a CA[1].

Designemos por O el centro euclidiano del segmento BC, describamos desde el centro O con radio OB la circunferencia euclidiana q y construyamos el punto A_1, simétrico a A respecto a la recta u.

[1] $BM \cdot \frac{CM}{AM} = BM \cdot \frac{AM}{BM} = AM$ y, por lo tanto, B, pasa a ser A;

$AM \cdot \frac{CM}{AM} = CM$ y, por consiguiente, A pasa a ser C.

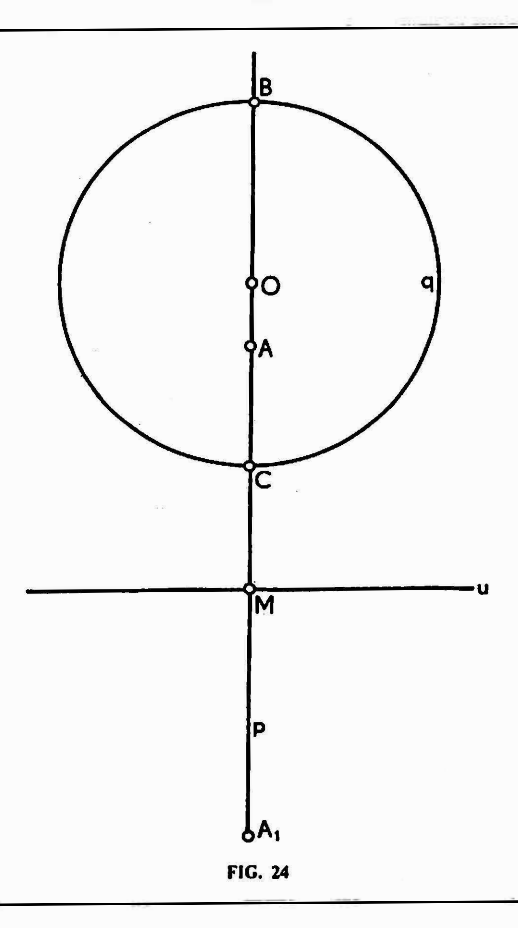


FIG. 24

Como

$$OA = OM - AM, \ OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM,$$

resulta que

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2. \quad (7)$$

Luego,

$$OM = \frac{1}{2}(BM + CM),$$

y, en virtud de la igualdad (6),

$$AM^2 = BM \cdot CM.$$

Por consiguiente, a la igualdad (7) se le puede dar la forma

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM =$$

$$= \frac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 4BM \cdot CM)$$

o

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM - CM)^2. \tag{8}$$

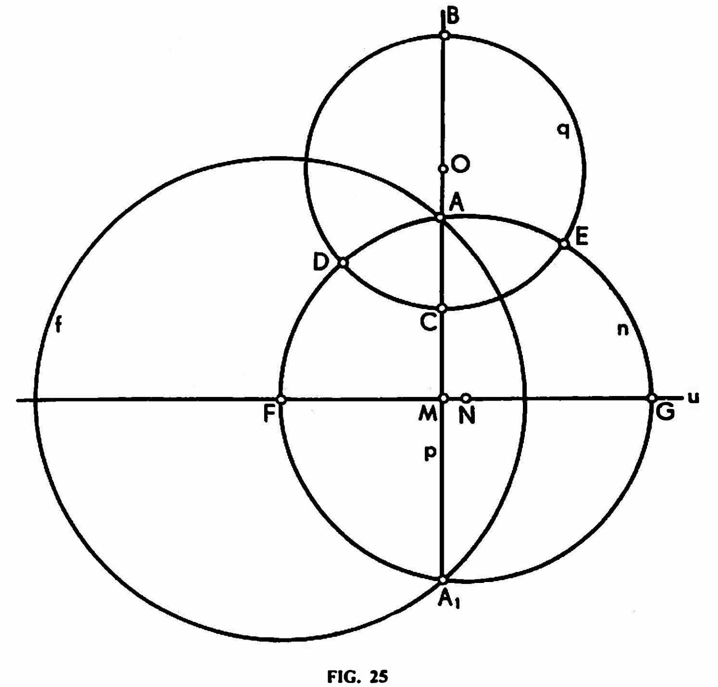


FIG. 25

Puesto que

$$\frac{1}{2}(BM - CM) = OB,$$

de la igualdad (8) obtenemos

$$OA \cdot OA_1 = OB^2.$$

De aquí vemos que los puntos A y A_1 son simétricos respecto a la circunferencia q.

Demostraremos que las distancias hiperbólicas de todos los puntos de la línea q respecto al punto A son iguales entre sí.

Tracemos a través de A y A_1 una circunferencia euclidiana arbitraria n (fig. 25). Su centro N se encuentra en la recta u y, por consiguiente, su parte situada en el semiplano τ representa en sí una recta hiperbólica.

Supongamos que n y q se cortan en los puntos D y E, y que n y u se cortan en los puntos F y G. Describamos con el radio FA desde el centro F la circunferencia euclidiana f. Las circunferencias q y f son mutuamente ortogonales, ya que f pasa por los puntos A y A_1, que son simétricos respecto a q (véase el § 3); por esto la inversión respecto a f transforma la circunferencia q en sí misma.

Luego, esta misma inversión transforma la recta p, que no pasa por el polo de inversión F, en una circunferencia que pasa por F y también por los puntos A y A_1, que durante la inversión dada permanecen inmóviles, es decir, la transforma en la circunferencia n. Por otro lado, la circunferencia n, que pasa por el polo de inversión, se transforma en una recta que, precisamente, es p, ya que esta recta debe pasar por los puntos A y A_1.

De aquí se deduce que los arcos AD y AE de la circunferencia n se transforman, respectivamente, en los segmentos AB y AC de la recta p. Por consiguiente, las longitudes hiperbólicas de los segmentos AD y AE de la recta hiperbólica n son iguales a las longitudes hiperbólicas de los segmentos AB y AC de la recta hiperbólica p o, dicho con otras palabras, las distancias hiperbólicas entre los puntos B, C, D, E y el punto A son iguales. Esto demuestra que la circunferencia hiperbólica se expone en la carta τ en forma de una circunferencia euclidiana que no tiene puntos comunes con la recta u; no obstante, la imagen de su centro (A) no coincide con el centro (O) de la correspondiente circunferencia euclidiana.

Para concluir señalaremos que toda recta hiperbólica que pasa por A corta la circunferencia q en un ángulo recto, hecho análogo a la conocida propiedad de los diámetros de la circunferencia euclidiana.

§ 6. LA EQUIDISTANTE

Supongamos que p y q son la perpendicular y la inclinada a la recta u en cierto punto de ésta M y que P_1Q_1 y P_2Q_2 son los arcos de las circunferencias euclidianas con un centro común M o, dicho de otra manera, son segmentos de dos rectas hiperbólicas m_1 y m_2 (fig. 26). Puesto que m_1 y m_2 cortan p en un ángulo recto, las longitudes hiperbólicas de los arcos P_1Q_1 y P_2Q_2 representan en sí las distancias hiperbólicas de los puntos Q_1 y Q_2 a la recta hiperbólica p. Estas distancias hiperbólicas son iguales entre sí, pues el arco P_1Q_1 puede ser convertido en el arco P_2Q_2 mediante la transformación de similitud con centro en M.

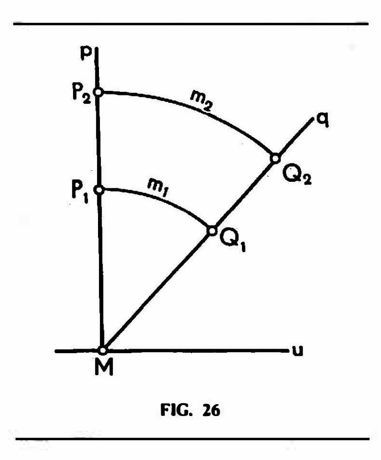


FIG. 26

De aquí deducimos que la línea q es el lugar geométrico de los puntos las distancias hiperbólicas entre los cuales y la recta hiperbólica p son iguales. Semejante línea se denomina *equidistante* y la recta hiperbólica p es su *base*. La equidistante, como se ve de los resultados del § 4, no es una recta hiperbólica.

La suposición de que el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una misma distancia de la recta dada y que se hallan a un mismo lado de ésta contradice a la propiedad señalada de la equidistante y, quiere decir, que contradice también al axioma del paralelismo de Lobachevski; ésta es equivalente al axioma del paralelismo de Euclides.

Advertiremos que las rectas hiperbólicas perpendiculares a la base

de la equidistante cortan ésta en un ángulo recto, lo que es evidente de la fig. 26.

La inversión respecto a la circunferencia con centro en la recta *u*, distinto de *M*, transforma *q* en una circunferencia euclidiana; ésta, igual que la recta hiperbólica, corta la recta *u*, pero su centro no pertenece a *u*.

Así pues, en la carta τ la equidistante se expresa o bien como una semirrecta euclidiana, que corta la recta *u* en un ángulo agudo u obtuso, o bien como un arco de una circunferencia euclidiana, que corta la recta *u* pero que tiene su centro fuera de *u*. Es fácil convencerse de que no existe una equidistante de otro género.

§ 7. LA LÍNEA LÍMITE

Tracemos el diámetro *p* de la circunferencia *q*, perpendicular a la recta *u*, y designemos por *C* el punto de su intersección con *q*, más cercano a *u* (fig. 27). Si se fija el punto *C* y se aumenta ilimitadamente el radio de la circunferencia *q* de tal manera que

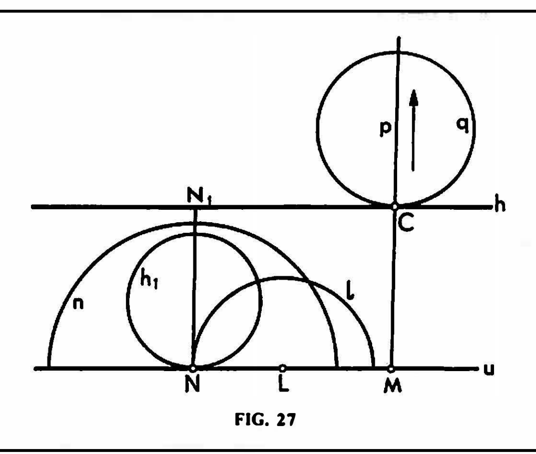


FIG. 27

su centro se desplace por la recta *p* en la dirección indicada por la flecha resultará ser que, en el límite, *q* se convertirá en la recta euclidiana *h*, paralela a *u*.

La línea h no es una recta hiperbólica y se denomina *linea límite*. De este modo, la forma límite de la circunferencia, uno de los puntos de la cual y la tangente en este punto están fijados y el radio de la cual crece ilimitadamente, es una línea recta en la geometría de Euclides y una línea límite en la geometría de Lobachevski. Su nombre se explica por esta propiedad de la línea límite.

Examinemos el movimiento hiperbólico que representa en sí la inversión respecto a la circunferencia n con el centro N en la recta u (fig. 27). Este movimiento transforma la línea h en la circunferencia euclidiana h_1, que pasa por N, con el centro en la perpendicular común NN_1 de las rectas euclidianas u y h, de donde se deduce que h_1 hace contacto con la recta u.

Así pues, la línea límite se expone en la carta τ o en forma de una recta euclidiana, paralela a u, o en forma de una circunferencia euclidiana que se toca con u.

Tracemos por N la circunferencia euclidiana l con el centro L en la recta u (fig. 27). Puesto que los radios de las circunferencias euclidianas h_1 y l son perpendiculares entre sí, la recta hiperbólica l corta la límite h_1 en un ángulo recto. De aquí deducimos que todas las rectas hiperbólicas que pasan por un punto de la límite infinitamente alejado, y que se denominan *ejes* de ésta, cortan dicha línea en un ángulo recto.

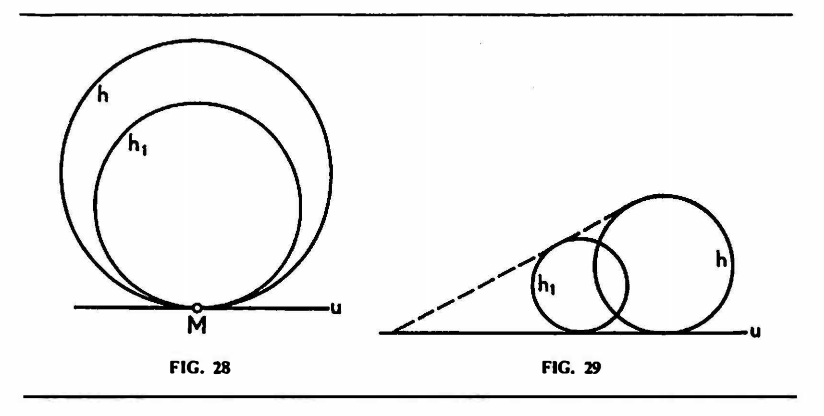


FIG. 28 FIG. 29

Cualquier límite h hiperbólicamente es igual a cualquier línea límite h_1, es decir, existe un movimiento hiperbólico que transforma h en h_1. Semejante movimiento hiperbólico será: la trans-

formación de similitud con el centro de similitud en la recta u, si h y h_1 son rectas euclidianas paralelas a u o son circunferencias euclidianas de diferentes radios tangentes a u (figs. 28 y 29); el desplazamiento del semiplano τ a lo largo de la recta u, si h y h_1 son circunferencias euclidianas de un mismo radio tangentes a u; la inversión con el polo en u, si una de las líneas h, h_1 es una recta euclidiana, paralela a u, y la otra es una circunferencia euclidiana, tangente a u.

§ 8. ALGUNOS TEOREMAS DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

Teorema 1. *La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor de 2d.*

Examinemos primeramente el triángulo rectángulo ABC (fig. 30). Sus lados a, b, c se exponen, respectivamente, en forma de un segmento de la perpendicular euclidiana a la recta u, de un arco de la circunferencia euclidiana con el centro M y de un arco de la circunferencia euclidiana con el centro N. El ángulo C es recto. El ángulo A es igual al ángulo entre las tangentes de las circunferencias b y c en el punto A o, lo que es lo mismo, al ángulo entre los radios NA y MA de estas circunferencias. Por último, $\angle B = \angle BNM$.

Construyamos en el segmento BN, como en el diámetro, la circunferencia euclidiana q; ésta tiene sólo un punto común B con la circunferencia c, pues su diámetro es el radio de dicha circunferencia. Por esto el punto A se encuentra fuera del círculo limitado por la circunferencia q y, por consiguiente,

$$\angle A = \angle MAN < \angle MBN.$$

De aquí, en virtud de la igualdad $\angle MBN + \angle B = d$, tenemos:

$$\angle A + \angle B < d; \tag{9}$$

por eso $\angle A + \angle B + \angle C < 2d$, que es lo que se quería demostrar.

Señalaremos que, con ayuda del correspondiente movimiento hiperbólico, cualquier triángulo rectángulo se puede situar de tal manera que uno de sus catetos pertenezca a la perpendicular euclidiana a la recta u; de esta manera, el método de deducción

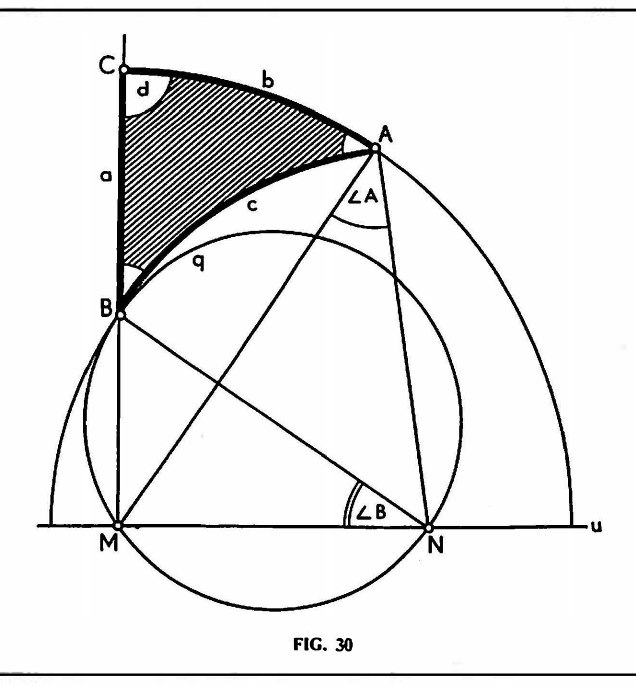


FIG. 30

de la desigualdad (9) que utilizamos es aplicable a cualquier triángulo rectángulo.

Si se trata de un triángulo oblicuángulo, se divide éste mediante una de sus alturas en dos triángulos rectángulos. La suma de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos es igual a la suma de los ángulos del triángulo oblicuángulo dado. De aquí, tomando en consideración la desigualdad (9), se deduce que el teorema es válido para cualquier triángulo.

Teorema 2. *La suma de los ángulos del cuadrilátero es menor de 4d.*

Para la demostración es suficiente dividir diagonalmente el cuadrilátero en dos triángulos.

Teorema 3. *Dos rectas divergentes tienen una, y solamente una, perpendicular común.*

Supongamos que una de las rectas divergentes dadas se expone en la carta τ en forma de la perpendicular euclidiana p a la recta u en el punto M, la otra se expone en forma de la semicircunferencia euclidiana q con el centro en u y, además, p y q no tienen puntos comunes (fig. 31). Semejante disposición de dos rectas hiperbólicas

divergentes en la carta τ siempre puede ser alcanzada mediante el correspondiente movimiento hiperbólico.

Tracemos desde *M* la tangente euclidiana *MN* a *q* y, con el radio *MN*, describamos desde el centro *M* la semicircunferencia *m*. Es obvio que *m* es una recta hiperbólica que corta tanto *p* como *q* en un ángulo recto. Por consiguiente, *m* representa en la carta τ la perpendicular común a las rectas divergentes dadas, que es la que buscamos. Dos rectas divergentes no pueden tener dos perpendiculares comunes pues, de lo contrario, existiría un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, cosa que contradice al teorema 2.

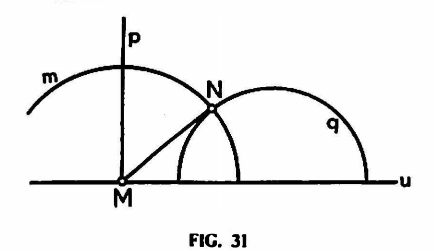


FIG. 31

FIG. 32

T e o r e m a 4. *La proyección rectangular del lado de un ángulo agudo sobre el otro lado es un segmento* (y no una semirrecta como lo es en la geometría de Euclides).

La justeza del teorema es evidente de la fig. 32, donde el segmento AB_1 es la proyección rectangular del lado *AB* del ángulo agudo *BAC* sobre su lado *AC*.

En esta misma figura el arco DE de la circunferencia euclidiana con el centro en M es la perpendicular a la recta hiperbólica AC. Esta perpendicular no se corta con la oblicua AB. Por lo tanto, la suposición de que la perpendicular y la oblicua a una misma recta siempre se cortan contradice al axioma del paralelismo de Lobachevski, y es equivalente al axioma del paralelismo de Euclides.

Teorema 5. *Si los tres ángulos del triángulo ABC son iguales, respectivamente, a los tres ángulos del triángulo $A'B'C'$, dichos triángulos son iguales.*

Admitamos lo contrario y tracemos respectivamente en los rayos AB y AC los segmentos $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$. Es evidente que los triángulos AB_1C_1 y $A'B'C'$ son iguales por dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. El punto B_1 no coincide con B,

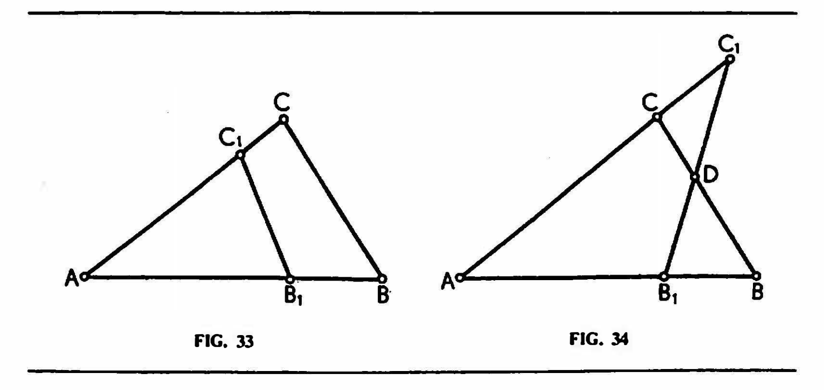


FIG. 33 FIG. 34

el punto C_1 no coincide con C, ya que en cualquier de estos casos tendría lugar la igualdad de los triángulos dados, cosa que contradice a lo admitido.

Examinemos las posibilidades siguientes.

a) El punto B_1 se encuentra entre A y B, y C_1 se encuentra entre A y C (fig. 33; en esta figura, y también en la siguiente, las rectas hiperbólicas se exponen convencionalmente en forma de rectas euclidianas). No es difícil convencerse de que la suma de los ángulos del cuadrilátero BCC_1B_1 es igual a $4d$, cosa imposible en virtud del teorema 2.

b) El punto B_1 se encuentra entre A y B, y C se encuentra entre A y C_1 (fig. 34). Designemos por D el punto de intersección de los segmentos BC y B_1C_1. Puesto que $\angle C = \angle C'$ y

$\angle C' = \angle C_1$, resulta que $\angle C = \angle C_1$, lo que es imposible, ya que el ángulo C es externo respecto al triángulo CC_1D [1].

De manera análoga se enfocan también otros casos posibles.

El teorema ha sido demostrado pues la admisión que hicimos nos condujo a una contradicción.

Del teorema 5 se deduce que en la geometría de Lobachevski no existe un triángulo semejante al triángulo dado que no sea igual a éste.

§ 9. OBSERVACIONES COMPLEMENTARIAS

Al examinar la carta τ puede hacerse una serie de deducciones importantes.

En primer lugar, todo teorema de la geometría de Lobachevski se lleva en la carta τ a cierto teorema de la geometría de Euclides. Por eso, la existencia de una contradicción en la geometría de Lobachevski llevaría tras de sí otra contradicción en la geometría euclidiana. Por consiguiente, la geometría de Lobachevski no es contradictoria.

En segundo lugar, el conocimiento de la geometría de Lobachevski facilita extraordinariamente la revelación de errores en los intentos de demostrar el axioma del paralelismo de Euclides que, en la mayoría de los casos, se reduce a la admisión de una suposición equivalente a este axioma. Para convencerse de lo infundada que es dicha suposición es suficiente demostrar que ésta contradice al axioma del paralelismo de Lobachevski. Así fue cómo procedimos en los tres ejemplos que examinamos anteriormente (respecto del lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta, así como de la intersección de la perpendicular y la oblicua a una recta dada, y también de la existencia de triángulos semejantes pero no iguales).

Pondremos un ejemplo más. El matemático del siglo pasado Farkas Bolyai (el padre del mencionado más arriba Juan Bolyai) propuso una demostración del axioma del paralelismo de Euclides que se basaba en la suposición de que a través de tres puntos que no pertenecen a una recta siempre puede ser trazada una

[1] La demostración del teorema "*El ángulo externo de un triángulo es mayor que el interno no adyacente a él*" no depende del axioma del paralelismo.

circunferencia. F. Bolyai consideraba este hecho evidente, pero en la geometría de Lobachevski no tiene lugar, ya que a través de tres puntos del plano de Lobachevski que no se encuentran en una recta pasa o bien una circunferencia, o bien la línea límite, o bien la equidistante y, por consiguiente, a través de tales tres puntos no siempre puede ser trazada una circunferencia. De aquí vemos que la suposición de F. Bolyai es equivalente al axioma euclidiano del paralelismo, cosa que atestigua cuán infundada es su demostración.

Lobachevski en sus investigaciones no hacía uso del método de construcción de cartas en el plano hiperbólico; este método fue propuesto por primera vez por el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835–1900) en una de sus obras editada en 1868, pasados 12 años desde la muerte del gran geómetra ruso.

La carta del plano de Lobachevski, que examinamos en nuestro libro y que se diferencia considerablemente de la carta construida por Beltrami, fue introducida en la ciencia por el científico francés Henri Poincaré (1854–1912).

§ 10. ACERCA DE LOS LOGARITMOS NATURALES Y FUNCIONES HIPERBÓLICAS

El material que a continuación se expone se utilizará en los párrafos siguientes[1)].

Establezcamos previamente algunas correlaciones importantes. Introducimos las designaciones:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{10}$$

donde n es un número entero positivo. Es evidente que

$$a^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}. \tag{11}$$

1) Los problemas que aquí se tratan están interpretados más detalladamente en los libros: *A. I. Markushévich*, Areas y logaritmos y *V. G. Shervátov*, Funciones hiperbólicas (serie "Lecciones populares de matemáticas").

De las igualdades (10) y (11) obtenemos:

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_n}{n}, \tag{12}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{13}$$

y

$$b_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Al descomponer el segundo miembro de la última igualdad en factores obtenemos

$$\frac{1}{n(n+1)}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right]. \tag{14}$$

Sustituyendo en los corchetes cada uno de los factores $1 + \frac{1}{n+1}$ por $1 + \frac{1}{n}$ aumentaremos la expresión (14) lo que, después de las simplificaciones, conducirá a la desigualdad

$$b_n - a_{n+1} < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

De aquí, en virtud de la igualdad (12) tendremos

$$b_n - a_{n+1} < b_n - a_n,$$

o

$$a_{n+1} > a_n.$$

Por consiguiente, la magnitud a_n crece con el incremento del número n.

Sustituyamos ahora en los corchetes de la expresión (14) cada uno de los factores $1 + \frac{1}{n}$ por $1 + \frac{1}{n+1}$. Como resultado, la expresión (14) disminuirá lo que, después de las simplificaciones,

conducirá a la desigualdad

$$b_n - a_{n+1} > \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \qquad (15)$$

Es fácil convencerse de que

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}; \qquad (16)$$

efectivamente, después de las simplificaciones, de aquí obtenemos:

$$\frac{1}{n} > \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

o

$$(n+1)^2 > n(n+2).$$

La justeza de la última desigualdad es evidente.

De (15), (16) y (13) obtenemos

$$b_n - a_{n+1} > b_{n+1} - a_{n+1}.$$

Por eso,

$$b_n > b_{n+1}.$$

Así pues, la magnitud b_n disminuye con el incremento del número n.

Puesto que $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, de lo anterior deducimos que

$$2 \leqslant a_n < b_n \leqslant 4.$$

De aquí y de (12) se deduce la desigualdad

$$b_n - a_n < \frac{4}{n}. \qquad (17)$$

Como al crecer el número n crece también a_n, disminuye b_n y la diferencia $b_n - a_n$ tiende a cero, lo que se deduce de (17), las magnitudes a_n y b_n tienden a un mismo límite que se ha admitido designar con la letra e, y además, la primera siempre es inferior y la segunda superior que este límite. Así

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad (18)$$

y

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (19)$$

En particular, cuando $n = 1$ tenemos

$$2 < e < 4. \tag{20}$$

El número e es irracional y su valor aproximado es igual a 2,71828.

De las desigualdades (19) se deduce la igualdad aproximada

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx e; \tag{21}$$

el error de ésta es menor que la diferencia $b_n - a_n$ y, por lo tanto, es menor que $\frac{4}{n}$.

Supongamos que x es una fracción propia positiva racional. Demos al número entero positivo n tales valores que el número $nx = k$ sea entero. En virtud de las desigualdades (19) obtenemos

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k < e^x < \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x}.$$

Por consiguiente, tendrá lugar la igualdad aproximada

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx e^x. \tag{22}$$

El error de ésta es menor que

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k+x} - \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)^x - 1\right] < \frac{xe^x}{k}. \tag{23}$$

Luego, por la fórmula del binomio de Newton, tenemos

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 1 + x + \frac{k(k-1)}{2k^2}x^2 + $$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{6k^3}x^3 + \ldots + \frac{1}{k^k}x^k. \tag{24}$$

De aquí se deduce la igualdad aproximada

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \approx 1 + x. \tag{25}$$

Designemos por σ el error de ésta. Es obvio que

$$\sigma = \frac{x^2}{2}\left[\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{3k^2}x + \ldots + \frac{2}{k^k}x^{k-2}\right] <$$

$$< \frac{x^2}{2}(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{x^2}{2(1-x)}. \qquad (26)$$

De (22), (25) y (26) deducimos que

$$e^x \approx 1 + x \qquad (27)$$

y que el error de esta relación no excede $\frac{x^2}{2(1-x)}$, ya que el límite de la expresión $\frac{xe^x}{k}$ [véase (23)] es igual a cero cuando k crece ilimitadamente. Este error puede hacerse tan pequeño como se quiera dando a la magnitud x valores suficientemente pequeños.

La fórmula (27) es válida en el caso cuando $x < 1$ es un número positivo irracional, de lo que uno puede convencerse examinando sus valores racionales aproximados.

Señalaremos que la fórmula (27) es válida también para valores negativos de x que, por su magnitud absoluta, son menores de la unidad; en este caso su error no excede $\frac{x^2}{2(1+x)}$.

De (22) y (24) puede ser obtenida otra igualdad aproximada más exacta que (27). Como $k \to \infty$, el límite del tercer término del segundo miembro de la igualdad (24) es igual a $\frac{1}{2}x^2$. Por consiguiente, se puede suponer que

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2. \qquad (28)$$

Utilizan esta fórmula cuando x es tan pequeña que se puede desatender de la magnitud x^3. No vamos a efectuar la valorización del error de la fórmula (28).

Examinemos el sistema de logaritmos con base e. Semejantes logaritmos se llaman *naturales* y juegan un papel muy importante en la matemática superior.

El logaritmo natural del número x se designa así: $\ln x$. En virtud de las propiedades de los logaritmos ya conocidas $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

Mediante la logaritmación de ambos miembros de la relación (27) obtenemos la igualdad aproximada siguiente:

$$\ln(1 + x) \approx x; \tag{29}$$

puede hacerse uso de esta igualdad cuando x es suficientemente pequeña.

Con ayuda del número e se calculan las *funciones hiperbólicas*: el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico (sus designaciones son, respectivamente, sh y ch), siendo

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{30}$$

Las dos otras funciones hiperbólicas, la tangente hiperbólica y la cotangente hiperbólica (sus designaciones son, respectivamente, th y cth), pueden calcularse así:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \tag{31}$$

Las funciones hiperbólicas tienen una serie de propiedades análogas a las propiedades de las funciones trigonométricas homónimas. A por más detalles remitimos al lector al libro de V. G. Shervátov que anteriormente mencionamos.

Para valores de la magnitud x suficientemente pequeños obtenemos de (27), (30) y (31) las igualdades aproximadas siguientes:

$$\operatorname{sh} x \approx x, \quad \operatorname{ch} x \approx 1, \quad \operatorname{th} x \approx x, \tag{32}$$

y de (28), (30) y (31) se obtienen las igualdades aproximadas:

$$\operatorname{sh} x \approx x, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad \operatorname{th} x \approx \frac{2x}{2 + x^2}. \tag{33}$$

§ 11. MEDICIÓN DE SEGMENTOS DE LAS RECTAS HIPERBÓLICAS

En este párrafo se demostrará cómo se calculan las longitudes hiperbólicas de los segmentos de rectas hiperbólicas.

Examinemos primeramente la semirrecta euclidiana del semiplano τ, perpendicular a la recta u en su punto M (fig. 35),

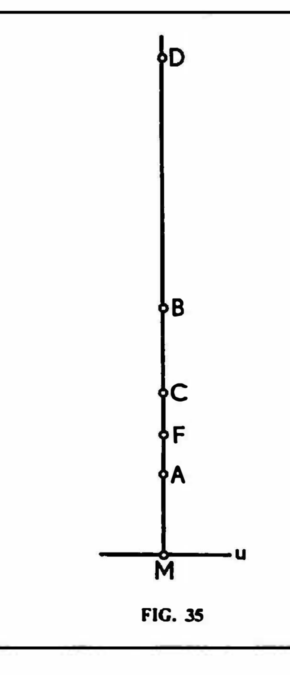


FIG. 35

y en ella los puntos A, B, C, D, dispuestos de tal manera que

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC},$$

o, lo que es igual,

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}.$$

Designando por μ cada una de las dos últimas relaciones advertimos que la transformación de similitud con el centro M y coeficiente μ traslada el segmento CD al segmento AB y, por consiguiente, las longitudes hiperbólicas de estos segmentos son iguales entre sí.

De lo dicho se deduce que la longitud hiperbólica del segmento AB (que designaremos por AB_h) se caracteriza por la relación $\frac{MB}{MA}$, o, dicho de otro modo, es cierta función de esta relación. Demostraremos que por esta función puede ser admitido

el logaritmo, es decir, se puede poner

$$AB_h = \log \frac{MB}{MA}. \qquad (34)$$

Supongamos que F es un punto del segmento AB. Entonces

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}.$$

Mediante la logaritmación de esta igualdad y en virtud de la fórmula (34) obtenemos

$$AB_h = AF_h + FB_h,$$

lo que concuerda con la regla de la suma de segmentos.

Hablando en general, en la fórmula (34) se puede coger el logaritmo con cualquier base positiva (pero que sea la misma para todos los segmentos y diferente de 1); sin embargo, para la concordancia de la regla deducida por nosotros con los dictámenes del párrafo 4, es necesario optar por el logaritmo natural y, por lo tanto, escribir la fórmula (34) en forma de

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA}. \qquad (35)$$

Efectivamente, si el segmento AB es suficientemente pequeño en comparación con el segmento MA, de las relaciones

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln\left(1 + \frac{AB}{MA}\right)$$

obtenemos en virtud de las fórmulas (29) y (35)

$$AB_h \approx \frac{AB}{MA},$$

lo que concuerda con el principio admitido en el párrafo 4.

Señalaremos que las longitudes hiperbólicas de los segmentos AB y BA, calculados por la fórmula (35), son iguales por su magnitud absoluta, pero se diferencian por el signo. Esto demuestra que cuando cambia la dirección del segmento por la opuesta, su longitud hiperbólica cambia de signo. Si la dirección del segmento nos es indiferente, en el segundo miembro de la fórmula (35) se debe coger la magnitud absoluta del logaritmo.

Examinemos ahora la semicircunferencia euclidiana q con centro M en la recta u, que corta u en los puntos N' y N, y la

perpendicular euclidiana a u en el punto M, que corta q en el punto A (fig. 36).

Supongamos que B es un punto del arco AN. Tracemos la recta euclidiana NB y designemos por B' su intersección con MA. No es difícil convencerse de la igualdad de los segmentos AB

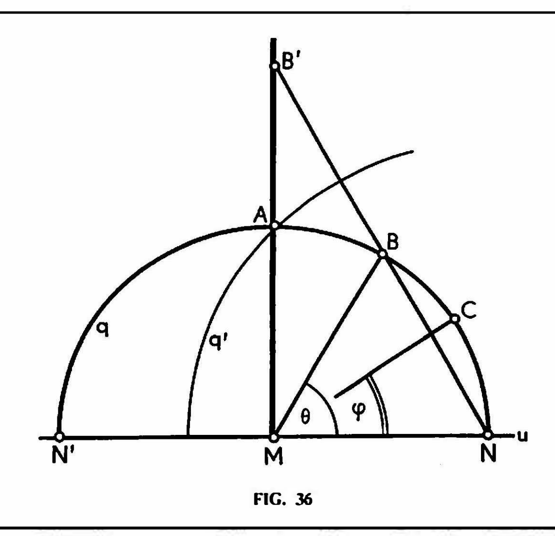


FIG. 36

y AB' de las rectas hiperbólicas q y MA. Efectivamente, la inversión respecto a la circunferencia q' de radio NA con el centro N transforma q en la recta euclidiana MA; con esto el punto A se transforma en sí mismo, y el punto B se transforma en B', ya que B y B' se encuentran en la recta euclidiana que pasa por el polo de inversión N. Por consiguiente,

$$AB_{\text{h}} = AB'_{\text{h}} = \ln \frac{MB'}{MA}.$$

Designemos el ángulo NMB por θ; entonces $\angle MNB = 90° - \frac{\theta}{2}$ y

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

De aquí

$$AB_h = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \tag{36}$$

Si C es un punto del arco BN (fig. 36) y $\angle NMC = \varphi$, entonces, como se deduce de (36),

$$AC_h = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \; BC_h = AC_h - AB_h = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

De aquí

$$BC_h = \ln\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right). \tag{37}$$

De tal modo, hemos obtenido fórmulas tanto para el caso cuando la recta hiperbólica, que contiene el segmento dado, se expone en forma de una semirrecta euclidiana, como también para el caso cuando ésta se expone como una circunferencia euclidiana.

§ 12. FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA

Examinemos en el semiplano τ el triángulo rectángulo ABC (fig. 37). Su lado BC es un segmento de la recta euclidiana OB ($OB \perp u$), el lado CA es un arco de la circunferencia euclidiana con el radio 1 y el centro O, el lado AB es un arco de la circunferencia euclidiana con el radio l y el centro M, el $\angle C$ es recto, el $\angle A = \alpha$ y el $\angle B = \beta$.

Bajemos desde el punto A la perpendicular AN sobre la recta u e introduzcamos las designaciones:

$$OB = p, \; NA = q, \; MO = m, \; MN = n, \; \angle NMA = \theta, \; \angle NOA = \varphi.$$

Designemos las longitudes *hiperbólicas* de los lados BC, CA y AB del triángulo dado, respectivamente, por a, b y c. (Por el contrario, l, m, n, p y q son las longitudes *euclidianas*.)

Advertiremos que

$$\angle OAN = \alpha, \; \angle OMB = \beta,$$

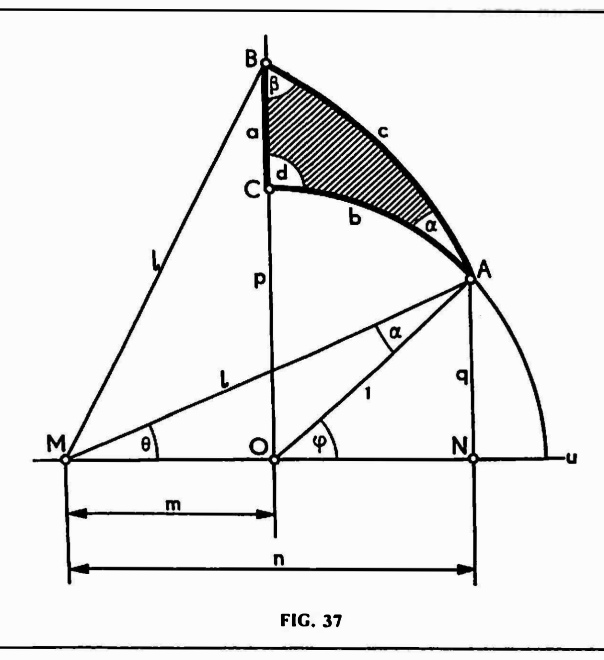


FIG. 37

ya que las tangentes en el punto A a los lados del ángulo A son perpendiculares a los lados del ángulo OAM, y las tangentes en el punto B a los lados del ángulo B son perpendiculares a los lados del ángulo OMB.

Estableceremos ahora una serie de dependencias entre las magnitudes que examinamos.

De los triángulos OBM y OAM tenemos:

$$p^2 = l^2 - m^2,$$

$$1 = l^2 + m^2 - 2mn (= OA^2).$$

De aquí

$$p^2 - 1 = 2m(n - m), \quad p^2 + 1 = 2(l^2 - mn). \tag{38}$$

A continuación, en virtud de la fórmula (35)

$$a = \ln \frac{p}{1} = \ln p.$$

Por consiguiente,

$$e^a = p, \quad e^{-a} = \frac{1}{p},$$

$$\operatorname{sh} a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 - 1}{2p},$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a}) = \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = \frac{p^2 + 1}{2p}.$$

De aquí, utilizando las igualdades (38), obtenemos:

$$\operatorname{sh} a = \frac{m(n-m)}{p}, \quad \operatorname{ch} a = \frac{l^2 - mn}{p}. \tag{39}$$

Del triángulo OAN tenemos:

$$\operatorname{sen} \varphi = q, \quad \cos \varphi = n - m. \tag{40}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 + n - m}{q},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}.$$

Puesto que en virtud de (36)

$$b = \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

resulta que

$$e^b = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - n + m}{q}.$$

De aquí

$$\operatorname{sh} b = \frac{n - m}{q}, \quad \operatorname{ch} b = \frac{1}{q}. \tag{41}$$

A continuación, de los triángulos OBM y OAN hallamos:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{q}{l}, \qquad \cos \theta = \frac{n}{l}, \tag{42}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{p}{l}, \qquad \cos \beta = \frac{m}{l}. \tag{43}$$

De esto se deduce que

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{1+n}{q},\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{l-n}{q},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{l-m}{p},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1+\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{l+m}{p}.$$

Puesto que en virtud de (37)

$$c=\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),$$

resulta que

$$e^{c}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{(l+n)(l-m)}{pq}=\frac{l^2+ln-lm-mn}{pq},$$

$$e^{-c}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{(l-n)(l+m)}{pq}=\frac{l^2-ln+lm-mn}{pq}.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sh}c=\frac{l(n-m)}{pq},\quad \operatorname{ch}c=\frac{l^2-mn}{pq}. \tag{44}$$

Y, por último, del triángulo OAM obtenemos

$$\alpha=\varphi-\theta.$$

De aquí, tomando en consideración (40) y (42), tendremos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\varphi\cos\theta-\cos\varphi\operatorname{sen}\theta=\frac{qn-q(n-m)}{l},$$

$$\cos\alpha=\cos\varphi\cos\theta+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta=\frac{n(n-m)+q^2}{l}=\frac{n(n-m)+l^2-n^2}{l},$$

pues $q^2=l^2-n^2$. Así,

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{qm}{l},\quad \cos\alpha=\frac{l^2-mn}{l}. \tag{45}$$

De (39), (41), (43), (44) y (45) obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m(n-m)}{l^2-mn},\ \operatorname{th}b=n-m,\ \operatorname{th}c=\frac{l(n-m)}{l^2-mn}, \tag{46}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{qm}{l^2-mn},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{l^2-mn}{qm}, \tag{47}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{p}{m},\ \operatorname{ctg}\beta=\frac{m}{p}. \tag{48}$$

Con ayuda de las igualdades (39), (41), (43) — (48) no es difícil comprobar la justeza de las fórmulas siguientes, que son fundamentales en la trigonometría hiperbólica:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b, \tag{49}$$

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sen} \alpha, \tag{50}$$

$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{sen} \beta, \tag{51}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{tg} \alpha, \tag{52}$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{tg} \beta, \tag{53}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cdot \cos \beta, \tag{54}$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cdot \cos \alpha, \tag{55}$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{sen} \beta, \tag{56}$$

$$\cos \beta = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{sen} \alpha, \tag{57}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta. \tag{58}$$

A las fórmulas (49) — (58) se les puede dar un aspecto más general si sustituimos en ellas las magnitudes a, b y c, respectivamente, por $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ y $\frac{c}{r}$, que es equivalente a la variación de la escala de las longitudes hiperbólicas. Aquí r es una constante, común para todos los segmentos.

Es característico que, para valores de las magnitudes a, b y c suficientemente pequeños, de las dependencias que obtuvimos entre los elementos del triángulo rectángulo se deducen igualdades aproximadas, análogas a las fórmulas de la trigonometría euclidiana. Así, por ejemplo, utilizando las relaciones (32) y (33) obtendremos de (50), (52) y (54):

$$a \approx c \operatorname{sen} \alpha,$$

$$a \approx b \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a \approx c \cos \beta,$$

y a la fórmula (49) le daremos el aspecto

$$1 + \frac{1}{2}c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}b^2\right),$$

de donde

$$\frac{1}{2}c^2 \approx \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}a^2b^2;$$

después de la simplificación, desatendiendo del último sumando del segundo miembro por motivo de su insignificancia, obtendremos

$$c^2 \approx a^2 + b^2.$$

De este modo, la fórmula (49) concuerda con el teorema de Pitágoras de la geometría euclidiana.

§ 13. LONGITUDES DE ALGUNAS CURVAS PLANAS DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

Longitud del arco de la línea límite. En la fig. 38 el arco ADB de la circunferencia euclidiana con centro O en la recta u representa un segmento de la recta hiperbólica, y el segmento euclidiano AB, que es paralelo a u, representa un arco de la línea límite.

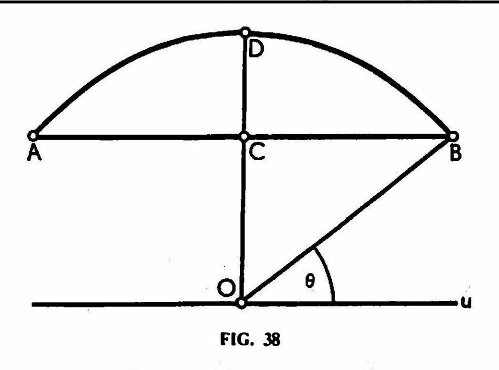


FIG. 38

Designemos, respectivamente, sus longitudes hiperbólicas por $2a$ y $2s$.

Utilizando la fórmula (36) obtendremos $a = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$; de aquí $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = e^a$. Luego, la utilización del principio 1° del párrafo 4 da:

$$s = \frac{AC}{OC} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}).$$

De aquí, en virtud de la determinación del seno hiperbólico, obtendremos

$$s = \operatorname{sh} a; \tag{59}$$

por consiguiente, $2s = 2\operatorname{sh} a$. De esa manera, la longitud del arco de la línea límite es igual al seno hiperbólico duplicado de la mitad de la cuerda que tiende este arco.

Puesto que $a < s$ resulta ser que de (59) tendremos

$$a < \operatorname{sh} a \quad (\text{cuando } a > 0). \tag{60}$$

L o n g i t u d d e l a c i r c u n f e r e n c i a. Previamente demostraremos dos proposiciones auxiliares.

a) Si a es una magnitud positiva suficientemente pequeña resulta que $\operatorname{th} a < a$[1]. Efectivamente, de (33) tenemos

$$\operatorname{th} a \approx \frac{2a}{2 + a^2} < a \text{ (cuando } a > 0).$$

b) Teniendo presente que los perímetros de los polígonos regulares de n lados, el inscrito y el circunscrito en la circunferencia euclidiana de radio 1, al crecer n ilimitadamente tienden a un mismo límite igual a la longitud de esta circunferencia, obtendremos

$$\lim_{n \to \infty} 2n \operatorname{sen} \frac{2d}{n} = \lim_{n \to \infty} 2n \operatorname{tg} \frac{2d}{n} = 2\pi. \tag{61}$$

Hallemos ahora la longitud s de la circunferencia hiperbólica de radio R. (Aquí y en lo sucesivo todas las designaciones se refieren a las longitudes hiperbólicas). Supongamos que AB y CD son los lados de los polígonos regulares de n lados uno de los cuales está inscrito y el otro circunscrito en esta circunferencia[2];

---

[1] Señalaremos sin demostración alguna que esta desigualdad es válida para cualquier valor positivo de la magnitud a.

[2] Supongamos que A es un punto de la circunferencia hiperbólica q con el centrro O. Construyamos el ángulo $AOM = \frac{2d}{m}$, donde m es el número entero positivo dado, y tracemos en el punto A una tangente a la circunferencia q. Esta tangente y la semirrecta OM o bein se cortan en cierto punto B, o no se cortan. En el primero de los casos el segmento AB será la mitad del lado del polígono regular de m lados circunscrito en la circunferencia q. En el segundo cosa en q no se puede circunscribir un polígono regular de n lados si el número entero n, que es moyor que m, es suficientemente grande.

designemos sus perímetros por p y P y las longitudes de los segmentos AC y EF por ρ y ρ' (véase fig. 39; en ella las figuras hiperbólicas se exponen convencionalmente en forma de figuras euclidianas).

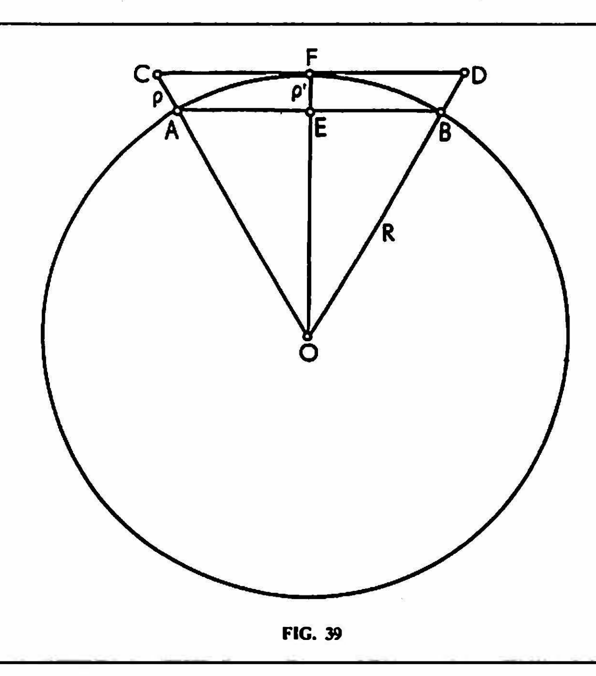


FIG. 39

De los triángulos rectágulos OAE y OCF, donde O es el centro de la circunferencia dada, obtendremos en virtud de las fórmulas (52) y (50):

$$\operatorname{th} AE = \operatorname{sh} OE \cdot \operatorname{tg} \frac{2d}{n},$$

$$\operatorname{sh} CF = \operatorname{sh} OC \cdot \operatorname{sen} \frac{2d}{n},$$

o

$$\operatorname{th} \frac{p}{2n} = \operatorname{sh}(R - \rho') \cdot \operatorname{tg} \frac{2d}{n}, \tag{62}$$

$$\operatorname{sh} \frac{p}{2n} = \operatorname{sh}(R + \rho) \cdot \operatorname{sen} \frac{2d}{n}. \tag{63}$$

Sea el número n tan grande que $\text{th}\,\frac{p}{2n} < \frac{p}{2n}$; puesto que en virtud de la desigualdad (60) $\frac{p}{2n} < \text{sh}\,\frac{p}{2n}$, de las fórmulas (62) y (63), multiplicando cada uno de sus términos por $2n$, tendremos:

$$\text{sh}\,(R - \rho')\cdot 2n\,\text{tg}\,\frac{2d}{n} < p < s < p < \text{sh}\,(R + \rho)\cdot 2n\,\text{sen}\,\frac{2d}{n}. \quad (64)$$

Tomando en consideración la igualdad (61) y teniendo en cuenta que ρ y ρ' tienden a cero cuando n crece ilimitadamente, llegamos a la conclusión de que el primero y el último de los términos de la sucesión de desigualdades (64) se aproxima a un mismo límite $2\pi\text{sh}R$, que coincide con la magnitud s:

$$s = 2\pi\,\text{sh}\,R.$$

Así pues, en la geometría de Lobachevski la longitud de la circunferencia es igual al seno hiperbólico de su radio multiplicado por 2π.

L o n g i t u d d e l a r c o d e l a e q u i d i s t a n t e. Supongamos que los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, que se encuentran a las distancias euclidianas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de la recta u, dividen el segmento AB en n partes euclídicamente iguales, y supongamos que las longitudes euclidianas de los segmentos OB y AB son iguales, respectivamente, a y_n y ζ (fig. 40; $OB \perp u$). Examinemos los arcos AA', P_1P_1', $\ldots$, BB' de las circunferencias euclidianas con el centro común O, que representan perpendiculares trazadas desde los puntos de la equidistante OB' sobre su base OB. La longitud hiperbólica h de cada una de estas perpendiculares se determina según la fórmula (36) por la igualdad $h = \ln\text{ctg}\,\frac{\theta}{2}$.

Designemos las longitudes hiperbólicas del arco $A'B'$ de la equidistante dada y el segmento AB de su base por s y a. Como las distancias euclidianas entre los puntos P_1', P_2', $\ldots$, B' y la recta u son, respectivamente, iguales a y_1 sen θ, y_2 sen θ, $\ldots$, y_n sen θ, y la longitud euclidiana de cada una de las partes en las que están divididos los segmentos AB y $A'B'$ es igual a $\frac{\zeta}{n}$, en virtud de las deducciones del § 4, tendremos: $a = \lim\limits_{n\to\infty} Z$,

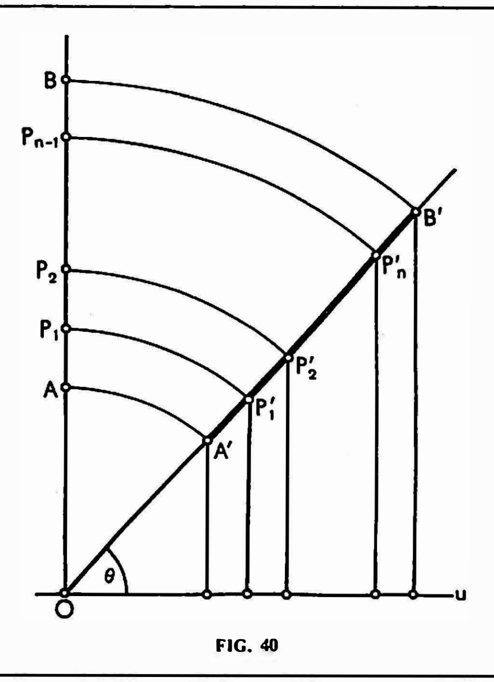


FIG. 40

$s = \lim\limits_{n \to \infty} Z'$, donde

$$Z = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}\right),$$

$$Z' = \frac{\zeta}{n}\left(\frac{1}{y_1 \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{y_2 \operatorname{sen}\theta} + \ldots + \frac{1}{y_n \operatorname{sen}\theta}\right).$$

De aquí

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Puesto que la relación de las magnitudes Z' y Z conserva un mismo valor, este mismo valor tendrá también la relación de sus límites:

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^h + e^{-h}) = \operatorname{ch} h.$$

Por consiguiente, $s = a \operatorname{ch} h$.

De tal manera, la longitud de la equidistante es igual a la proyección rectangular de este arco sobre la base de la equidistante, multiplicada por el coseno hiperbólico de la distancia entre sus puntos y la base.

CONCLUSIÓN

En los últimos renglones de nuestro libro, sin aducir demostraciones, informaremos a nuestro lector sobre algunas proposiciones de la geometría de Lobachevski que acentúan su originalidad.

Ante todo nos referiremos a una superficie del espacio euclidiano que mencionamos de paso en el § 2.

En la fig. 41 se expone un plano euclidiano y en él la recta *a* y la curva *t* (*tractriz*), enlazada con *a* y que tiene la propiedad

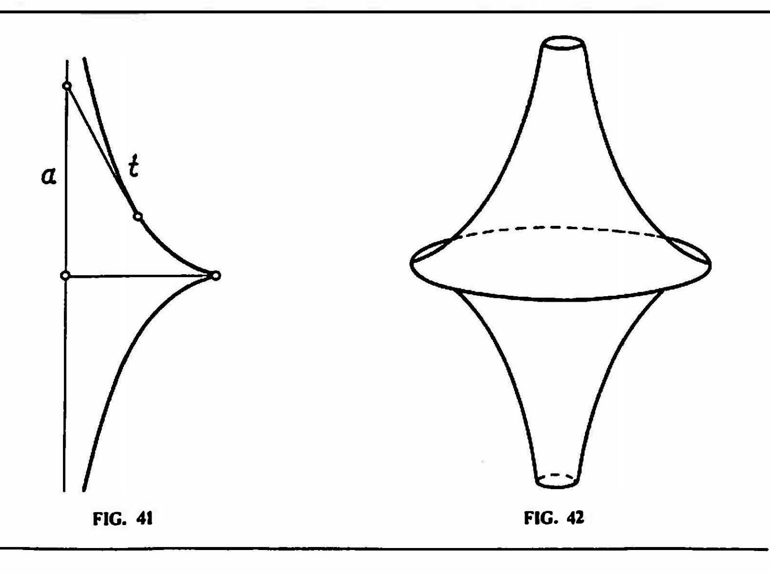


FIG. 41 FIG. 42

siguiente: el segmento de la tangente a *t* en cualquier punto de ésta, comprendido entre el punto de contacto y el punto de intersección de la tangente con la recta *a*, tiene una longitud constante que no depende de la elección del punto de contacto.

Si hacemos girar la tractriz *t* alrededor de la recta *a*, la primera describirá una superficie denominada *seudoesfera* (fig. 42).

La seudoesfera es precisamente aquella superficie que investigó Beltrami demostrando que ésta se caracteriza por sus propiedades, propias del pedazo del plano de Lobachevski (si se consideran "rectas" las líneas más cortas en él).

De manera semejante en el espacio de Lobachevski existe una superficie en la que se cumplen (para la misma interpretación de la noción "recta") las tesis superficiales de la geometría euclidiana; ésta es la llamada *superficie límite*, que la describe la línea límite girando alrededor de unos de sus ejes.

Alegaremos ahora las formulaciones de algunas de las tesis más simples que son características para la geometría de Lobachevski.

1. Dos rectas paralelas se aproximan asintóticamente en la dirección de su paralelismo (es decir, la distancia entre un punto de una de estas rectas y la otra recta puede hacerse tan pequeña como se quiera) y divergen ilimitadamente en la dirección opuesta.

2. Supongamos que la recta *c* corta las rectas divergentes *a* y *b* en los puntos *A* y *B*. La longitud del segmento *AB* será la

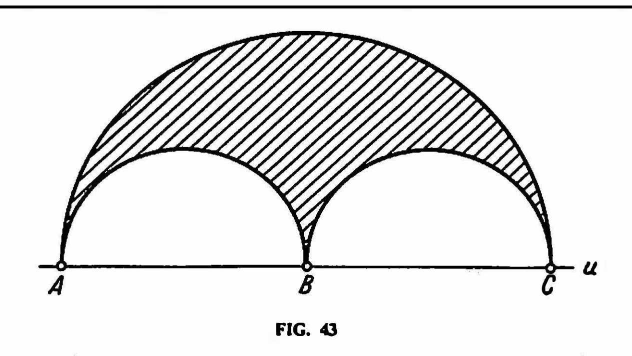


FIG. 43

mínima si *c* coincide con la perpendicular común a ambas rectas divergentes. A ambos lados de su perpendicular común las rectas *a* y *b* divergen ilimitadamente.

3. El área del triángulo *ABC* es igual a $r^2 (\pi - \angle A - \angle B - \angle C)$, donde las magnitudes de los ángulos se cogen en medida de radianes y *r* es la constante común para todos los triángulos, que ya mencionamos en el § 12. El área máxima πr^2 pertenecerá

al triángulo en el que todos los ángulos son iguales a cero (en la fig. 43 semejante triángulo está sombreado).

4. El ángulo inscrito en una circunferencia no siempre se mide por la mitad del arco en el que se apoya. En particular, en el diámetro siempre se apoya un ángulo agudo (y no recto, como en la geometría euclidiana).

5. Si está dado un número entero arbitrario $n > 6$ puede ser construida tal circunferencia que el lado del polígono regular de n lados, inscrito en dicha circunferencia, sea igual al radio de ésta. El lado del hexágono regular inscrito en una circunferencia siempre es mayor que el radio de ésta.

6. En la geometría de Lobachevski, en ciertos casos, se puede efectuar la cuadratura del círculo, es decir, utilizando la regla y el compás se puede construir un círculo y un "cuadrado" equidimensionales (más exactamente, un rombo equiángulo, pues en el plano hiperbólico no existe un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos). En la geometría euclidiana, como es sabido, no puede ser realizada la cuadratura del círculo.

Los ejemplos examinados demuestran cuán grande es a veces la divergencia entre las deducciones de las geometrías de Euclides y de Lobachevski.

* *
*

En nuestro libro se han marcado solamente los primeros jalones del camino que conduce a la penetración en el fondo de la geometría hiperbólica. Nos alegraremos si el lector, que por nuestra narración ha conocido los principios de esta ciencia maravillosa, se interese por ella y desee estudiar los trabajos especiales dedicados a ésta y, entre ellos, las obras de su fundador N. I. Lobachevski.

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial 1978

Uspenski V. Triángulo de Pascal

Lubich Yu., Shor L.

Método cinemático

en los problemas geométricos

Shilov G. Gama simple

(confección

de la escala musical)

Vilenkin N. Método

de aproximaciones sucesivas

Editorial MIR 

Moscú